Раков С.А.
ХДПУ ім. Г.С.Сковороди, Rakov_S@ukr.net

Дослідницький підхід у курсі геометрії, відкриті задачі, проблемні області, чотирикутники та пакет динамічної геометрії DG

Вступ

Дослідницький метод (research approach) у навчанні[1] на практиці використовується найчастіше через розгляд *“відкритих задач” (open problems)*, тобто задач, в яких не все визначено: або умова задачі, або її твердження мають невизначені елементи. Розв’язування відкритої навчальної задачі полягає у тому, щоб спочатку її “довизначити”, і тільки після цього знайти розв’язок. Як правило, “довизначення” відкритої задачі можливе різними способами – це залежить від освіченості, досвідченості, особистісних уподобань учасників навчального процесу (учнів та вчителя) і цей процес “довизначення” є складовою етапу *постановки задачі (problem posing)*, що у професійній дослідницькій роботі складає суттєву частину успішності дослідження.

Задача називається *задачею з відкритою умовою (open begun problem)*, якщо невизначеність наявна в умові задачі (наприклад, ізопериметрична задача для трикутника: “Визначити умови, при яких трикутник із заданим периметром обмежує найбільшу площу”). Задача називається *задачею з відкритим твердженням (open ended problem)*, якщо невизначеність наявна в її твердженні (наприклад, дослідження властивостей ромбоїду: “Дослідити властивості чотирикутника, який має вісь симетрії”). Вищою формою відкритості задачі є її відкритість і в умові і в твердженні, тобто коли невизначеність наявна як в умові задачі, так і в її твердженні (наприклад, дослідження осьових симетрій чотирикутника: “За яких умов чотирикутник має 1, 2, 3, 4, 5, ... осей симетрії?”). Але можна уявити собі і ще більш “відкриту задачу” – задачу, у якій зовсім немає ні умови, ні твердження, але щось-таки в неї є – і це “щось-таки” є предметне поле задачі. У цьому випадку говорять про *проблемне поле (problem field)* (наприклад; “Дослідити властивості довільного чотирикутника”).

Розгляд відкритих задач у навчальних курсах з математики наближає навчальний процес до творчого математичного процесу, а термінологія дослідницького методу у навчанні відповідає термінології професійної математичної діяльності.

Тема “Чотирикутники” є природним проблемним полем для шкільного курсу геометрії. Дійсно, з одного боку, після теми “Трикутники” учні ознайомлені з широким колом задач, пов’язаних із трикутниками: ознаки рівності трикутників, алгоритми побудови трикутників за заданими характеристиками, розв’язування трикутників, коло, вписане у трикутник, коло, описане навколо трикутника і т. д., які природно “напрошуються” на узагальнення. Після вивчення програмної теми “Чотирикутники” учні ознайомлені із властивостями чотирикутників різних конкретних типів: трапецій, паралелограмів, ромбів, ромбоїдів. Але які властивості мають довільні чотирикутники – це природне питання не обговорюється у традиційному курсі геометрії.

Дослідницькі задачі у курсу геометрії не є новиною, але методика їх розгляду ще недостатньо відпрацьована і одною з причин цього є велика трудомісткість проведення експериментів, які є невід’ємною складовою дослідження. З розробкою спеціалізованих пакетів для підтримки професійної математичної діяльності з’явилася реальна можливість суттєво підвищити ефективність математичних експериментів. Пакет динамічної геометрії DG[2] був створений для підтримки дослідницького підходу у вивченні геометрії і це є його головне (але не єдине) призначення. Можна сказати, що пакет DG створювався для “матеріалізації” (або “віртуалізації”) на випадок геометрії принципу Е.Маха продуктивного дослідження явищ природи [3, с.8]: “Составив определенное заключение на основании одного конкретного случая, надлежит постепенно и как можно шире модифицировать сопутствующие ему обстоятельства, стремясь насколько это возможно, остаться при первоначальном заключении. Не существует иного способа, который с большей надежностью и меньшими умственными усилиями приводил бы к простейшему объяснению всех явлений природы”.

Спочатку стаття мала назву “Підтримка засобами пакета DG дослідницького методу вивчення теми “Чотирикутники ” у курсу геометрії загальноосвітньої школи”. Але потім стало зрозумілим, що усі поняття, які входять у назву є рівноправними: проблемним полем є не тільки тема “Чотирикутники”, але й дослідницький підхід у вивченні геометрії, і використання пакета DG для його підтримки разом з тим, використання пакета DG у курсі геометрії дає цікаву тематику для різних проблемних полів, наприклад, наближені методи розв’язування задач у середовищі пакета DG, або складність алгоритмів розв’язування задач і інші. Тому у назві статті просто перелічено через кому її ключові поняття, а структурні зв’язки між ними залишаються на розсуд читача. Тобто предметом даної статті є обговорення досліджень предметного поля “Чотирикутники” у курсі геометрії і можливостей продуктивного використання для цього пакета динамічної геометрії DG.

Методичні питання організації навчальних досліджень залишаються на розсуд учителя. У залежності від рівня підготовленості класу це можуть бути метод проектів з використанням групової

---

[1] Існують діаметрально протилежні погляди на місце дослідницького підходу у навчанні математики: йому місце тільки у спеціалізованих математичних класах, опоненти вважають, що дослідницький метод повинен використовуватись у всіх без винятку класах, у всіх без винятку темах, тому, що це є “жива душа математики”, її спосіб існування, що значно вище ніж засвоєння готових фактів та алгоритмів розв’язування типових задач. І хоча друга точка зору більш імпонує під час переосмислення задач і методів освіти, слід визнати, що треба ще пройти великий шлях і науковцям-дидактам, і вчителям-практикам для опанування дослідницьким підходом в освіті.

[2] Програмно-методичний комплекс “ПК DG” включає в себе крім самого пакета DG методичний посібник для вчителя, посібник для учня, настанову користувача, бібліотеку динамічних креслень, комплект робочих зошитів для підтримки навчальних дослідницьких робіт. “ПК DG” рекомендований МОН України, має сертифікат відповідності УкрСеПро.

форми роботи з наступним обговоренням результатів досліджень на учнівській науковій конференції, або “метод мозкового штурму” для постановки задач з подальшою самостійною роботою над поставленими задачами, або виконання навчальних досліджень за шаблоном, заздалегідь підготовленим вчителем у вигляді “Посібника з проведення навчального дослідження на тему “Дослідження властивостей чотирикутника” і т.п.

Ознаки рівності чотирикутників

Цю проблемну область слід досліджувати принаймні під трьома кутами зору:

- Ознаки рівності трикутників, ознаки рівності чотирикутників, ознаки рівності довільних многокутників.
- Алгоритми побудови чотирикутників (у відповідності до кожної ознаки рівності чотирикутників).
- Побудова експертних систем у середовищі пакета DG, які “розв’язують чотирикутники” – визначають (на жаль тільки наближено) параметри чотирикутника через вхідні параметри, які фігурують в ознаці чотирикутника.

Формулюванню різноманітних ознак рівності чотирикутників може бути присвячено окреме заняття у формі “уроку постановки задач”, або цю тему можна зробити наскрізною для теми “Чотирикутники”. Наведемо кілька гіпотетичних (їх ще буде треба довести!) ознак рівності чотирикутників, які можуть виникнути на такому уроці.

1 ознака рівності чотирикутників

Якщо чотири послідовні сторони одного чотирикутника дорівнюють чотирьом послідовним сторонам другого чотирикутника і один з кутів першого чотирикутника дорівнює відповідному куту другого чотирикутника, то ці два чотирикутники рівні.

2 ознака рівності чотирикутників

Якщо чотири послідовні сторони одного чотирикутника дорівнюють чотирьом послідовним сторонам другого чотирикутника і один з кутів першого чотирикутника між двома протилежними сторонами дорівнює відповідному куту другого чотирикутника між двома протилежними сторонами, то ці два чотирикутники рівні.

3 ознака рівності чотирикутників

Якщо чотири послідовні сторони одного чотирикутника дорівнюють чотирьом послідовним сторонам другого чотирикутника і одна з діагоналей першого чотирикутника дорівнює відповідній діагоналі другого чотирикутника, то ці два чотирикутники рівні.

4 ознака рівності чотирикутників

Якщо три послідовні сторони одного чотирикутника дорівнюють трьом послідовним сторонам другого чотирикутника і два послідовні кути між ними одного з чотирикутників дорівнюють двом відповідним кутам другого чотирикутника, то ці два чотирикутники рівні.

5 ознака рівності чотирикутників

Якщо дві послідовні сторони одного чотирикутника дорівнюють двом послідовним сторонам другого чотирикутника і три послідовні кути одного з чотирикутників дорівнюють трьом відповідним кутам другого чотирикутника, то ці два чотирикутники рівні.

Зрозуміло, наведеними п’ятьма ознаками тема “Ознаки рівності чотирикутників” не вичерпується. Наголосимо, що наведені ознаки поки що є тільки гіпотезами – їх потрібно довести[3], але це не складно і спирається на ознаки рівності відповідних трикутників, які природним шляхом визначаються для кожної ознаки рівності чотирикутників. Інший шлях доведення ознак рівності лежить у винаході алгоритмів побудов чотирикутників за параметрами ознак рівності. Це відповідає принципам конструктивізму у математиці: *існує* - значить винайдено алгоритм побудови об’єкту, що має задані властивості; *довести* - значить винайдено алгоритм перевірки відповідної властивості. Конструктивізм у математиці чудово випередив винахід комп’ютерів, бо використання комп’ютерів у математичних дослідженнях передбачає можливість побудови комп’ютерних моделей математичних об’єктів.

Експертні системи “ЕС чотирикутник 1” ... “ЕС чотирикутник 5”

Природною є задача пошуку алгоритму побудови чотирикутника за параметрами кожної з ознак рівності чотирикутників, причому доведення результативності кожного з цих алгоритмів є доведенням відповідної ознаки рівності чотирикутників. Конструювання цих алгоритмів є цікавими творчими задачами, які лежать на межі геометрії та інформатики (побудувати геометричний об’єкт – це означає винайти алгоритм для спеціального *виконавця алгоритмів*, який може використовувати *два інструменти: циркуль та лінійку*, що визначаються *наборами команд: побудувати геометричний елементарний об’єкт (відрізок прямої або коло), побудувати точку перетину двох елементарних об’єктів).* Конструювання алгоритмів геометричних побудов можуть складати теми навчальних проектів.

Зауважимо, що в свою чергу, кожний з цих алгоритмів є основою для побудови відповідної *експертної системи* у середовищі пакета DG – динамічного креслення, параметрами якого є параметри відповідної рівності трикутників і яка забезпечує автоматичне обчислення інших параметрів побудованого чотирикутника.

Експертна система “ЕС чотирикутник 1”

---

[3] Ми свідомо допускаємо вільність висловлювання у виразі “доведення ознаки рівності чотирикутників”, маючи на увазі доведення теореми, що два чотирикутники, що відповідають умовам ознаці рівності дійсно є рівними. Це відповідає практиці використання такого виразу і скорочую формулювання.

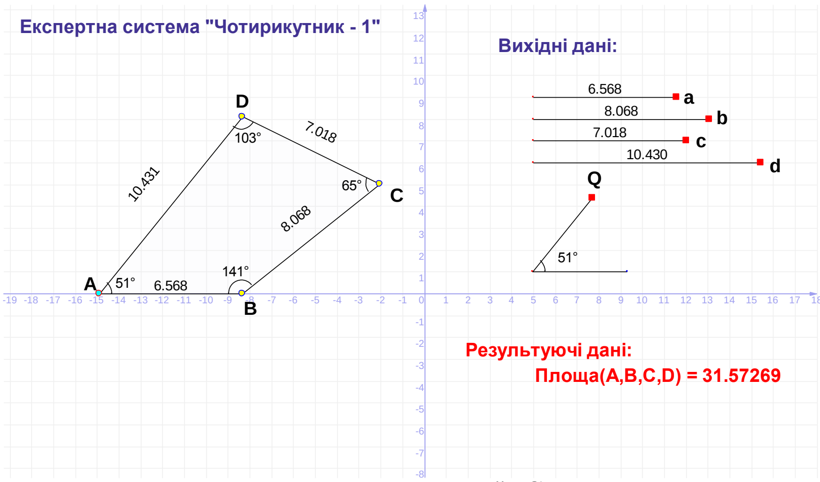

Рисунок . Експертна система "ЕС Чотирикутник -1"

В експертній системі "ЕС чотирикутник 1" можна задавати значення вихідних параметрів (рухом відповідного слайдера – точки, яку позначено червоним квадратиком): довжин сторін чотирикутника *a, b, c, d* та кута між сторонами *a* і *d*. При цьому автоматично обчислюються інші залежні параметри чотирикутника: величини кутів і площа. Якщо у дослідника виникне потреба в обчисленні будь-якої іншої числової характеристики чотирикутника, то для цього можна скористатися послугою пакета "Додати напис" за допомогою вмонтованого допоміжного вікна "Властивості напису" пакета DG можна сконструювати відповідний динамічний надпис, який буде містити вирази, що визначають значення потрібних числових характеристик креслення. Значення цих виразів будуть динамічно обчислюватися при кожній зміні параметрів динамічного креслення. Зокрема так було створено динамічний напис на рисунку 1, в якому обчислюється площа чотирикутника.

Алгоритм побудови динамічного креслення "ЕС чотирикутник 1":

1. Побудувати сторону AB, довжина якої дорівнює *a*;
2. Відкласти від точки A промінь, який утворює із стороною AB заданий кут;
3. Побудувати вершину D чотирикутника - відкласти на промені відрізок, довжина якого дорівнює стороні *d*;
4. Побудувати кола із центрами у кінцях побудованих відрізків і з радіусами, які дорівнюють відповідно *b* і *c*;
5. Знайти точку перетину побудованих кіл;
6. З'єднати отримані точки A, B, C, D відрізками прямих.

Доведення результативності алгоритму побудови чотирикутника у динамічному кресленні "ЕС чотирикутник 1"

Кожен з кроків 1 – 4 алгоритму може бути виконаним при довільних вихідних даних. Крок 5 може бути виконано тільки у випадку, якщо кола перетинаються, причому точок перетину може бути 1 або 2. Таким чином, отримуємо наступні умови результативності алгоритму:

$(a^2 + d^2 - 2ad\cos A) = (b + c)$ - існує єдиний чотирикутник (у цьому випадку чотирикутник вироджується у трикутник, у якому сторони b і d утворюють розгорнутий кут);

$(a^2 + d^2 - 2ad\cos A) < (b + c)$ - існує два чотирикутники (опуклий та увігнутий);

$(a^2 + d^2 - 2ad\cos A) > (b + c)$ - чотирикутника, що задовольняє вихідні умови, не існує.

Якщо обмежуватись тільки опуклими чотирикутниками, то із вище доведеного випливає перша необхідна і достатня умова існування опуклого чотирикутника.

1 умова існування і єдиності опуклого чотирикутника

Опуклий чотирикутник із заданими параметрами: довжинами сторін a, b, c, d і кутом A між сторонами a і d існує один і тільки один тоді і тільки тоді, якщо виконується умова $(a^2 + d^2 - 2ad\cos A) \le (b + c)$.

Експертна система "ЕС чотирикутник 2"

На рисунку 2 наведено копію екрана "ЕС чотирикутник 2" (зауважимо, що ця задача розглядається у розділі XVI. "Правдоподобные рассуждения в изобретении и обучении" - "біблії дидактів математики" [2]).

Ми не будемо наводити ні алгоритму побудови, ні доведення його результативності. Зауважимо тільки, що навіть для опуклих чотирикутників єдиність розв'язку у загальному випадку не має місця.

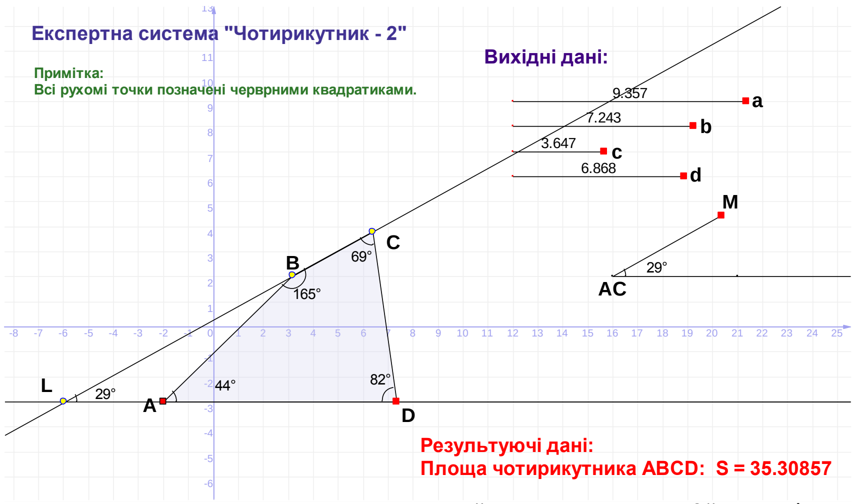

Рисунок . Експертна система "Чотирикутник - 2", яка відповідає другій ознаці рівності чотирикутників

Наведемо три твердження, доведення яких можна розглядати як творчі завдання для учнів.

Теорема 1

Для того, щоб шарнірний чотирикутник із сторонами a, b, c, d міг утворювати два різні чотирикутники з однаковими значеннями кутів між сторонами a і c, необхідно і достатньо, щоб цей шарнірний чотирикутник міг утворювати трапецію із основами a і c.

Теорема 2

Для того, щоб шарнірний чотирикутник із сторонами a, b, c, d (a>c) міг утворювати трапецію із основами a і c необхідно і достатньо, щоб відрізки a-c, b, d утворювали трикутник.

Теорема 3

Для того, щоб шарнірний чотирикутник із сторонами a, b, c, d (a>c) міг утворювати два різні чотирикутники з однаковими значеннями кутів між сторонами a і c, необхідно і достатньо, щоб відрізки a-c, b, d утворювали трикутник.

Доведення теореми 3 складається із співставлення тверджень теорем 1 і 2. Доведення теореми 1 спирається на теорему про властивості функції, що неперервна на відрізку[4] (якщо функція неперервна на відрізку і набуває на його кінцях значення різних знаків, то існує точка відрізка, в якій функція набуває значення 0).

На рисунку 3 наведено два різні чотирикутники з однаковими кутами між сторонами *a* і *c*, утворених за допомогою одного шарнірного чотирикутника. Ці чотирикутники було знайдено і побудовано за допомогою модифікованого динамічного креслення “ЕС чотирикутник –1 ”: в ньому було побудовано пряму, яка містить сторону *c* та виміряно кут між побудованою прямою та віссю абсцис (сторона *a* лежить на цій осі). Необхідні зауваження стосовно наближених обчислень параметрів знімаються за допомогою стандартних міркувань на основі неперервної залежності кута між сторонами *a* і *c* в околах кута *A*, який визначає чотирикутник разом із довжинами сторін чотирикутника (згідно першої ознаки рівності чотирикутників).

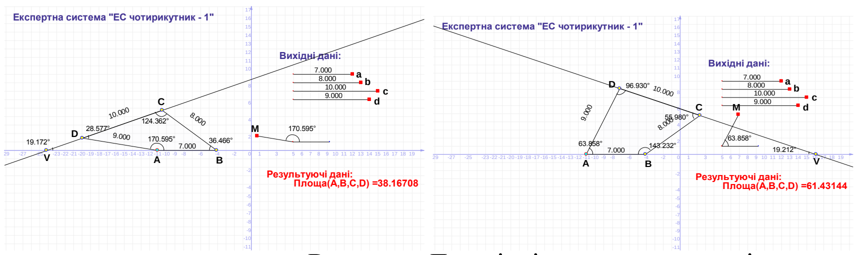

Рисунок Два різні чотирикутники із заданими параметрами

Максимальна площа шарнірного чотирикутника

Зауважимо, що шарнірним називається чотирикутник, в якому визначено впорядкований набір довжин його сторін. Шарнірний чотирикутник –це сімейство чотирикутників із заданим впорядкованим набором довжин сторін. Його фізичною або уявною моделлю служить набір відрізків – планок, поєднаних послідовно у вершинах так, що вони можуть вільно обертатися навколо точки поєднання – шарніру, не змінюючи своїх довжин.

Оскільки шарнірний чотирикутник – це насправді сімейство чотирикутників, то природними є запитання про те, які з цих чотирикутників мають екстремальні властивості – наприклад, максимальну або мінімальну площу, суму кутів, суму довжин діагоналей, який містить коло максимальної довжини або лежить у колі мінімальної довжини і т.д. Як вже зауважувалось, постановка таких задач може скласти предмет цікавого уроку або фрагмента уроку у стилі *Уроку*

[4] Теореми про властивості функції, що неперервна на обмеженому замкненому відрізку на наш погляд слід наводити у шкільному курсі математики “за модулем теореми про повноту множини дійсних чисел”. Ці теореми потрібні у багатьох випадках як обґрунтування існування об’єктів або наявності у них деяких властивостей.

постановки задач ***"Екстремальні чотирикутники"***, з наступним визначенням тем навчальних проектів.

Для трикутників задача про визначення екстремального трикутника із заданими сторонами не має змісту – трикутник повністю визначається своїми сторонами (третя ознака рівності трикутників). Як буде показано далі, розв'язок задачі про шарнірний чотирикутник максимальної площі є ключем для розв'язування задачі про довільний шарнірний многокутник максимальної площі.

Емпіричний пошук кандидатів на екстремальний шарнірний чотирикутник за допомогою пакета DG (експертної системи "ЕС Чотирикутник - 1")

Сімейство чотирикутників, які відповідають заданому шарнірному чотирикутнику, є однопараметричним і цим єдиним параметром може виступати один з кутів чотирикутника. Тому завантажимо у пакет DG динамічне креслення **"ЕС Чотирикутник - 1"** і, змінюючи величину кутового параметра знайдемо чотирикутник максимальної площі. На Рисунку 4 наведену копію відповідного екрану – знайдений чотирикутник, що є кандидатом на чотирикутник максимальної площі для заданого шарнірного чотирикутника.

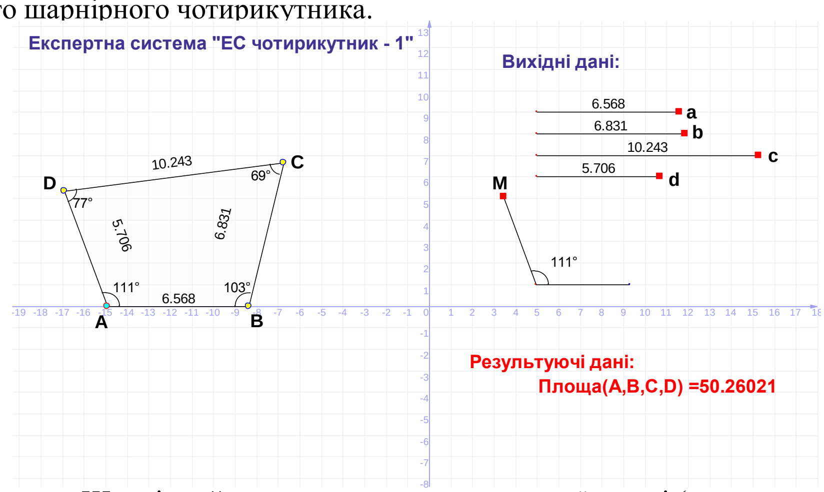

Рисунок Шарнірний чотирикутник максимальної площі (евристичний пошук)

Евристичний пошук характеристичної властивості шарнірного многокутника максимальної площі

Які властивості має зображений на Рисунку 3 чотирикутник? Звертає увагу на себе те, що сума величин протилежних кутів дорівнює 180°. Оскільки відомо, що навколо заданого чотирикутника можна описати коло тоді і тільки тоді, якщо сума його протилежних кутів дорівнює 180°, то сама собою напрошується гіпотеза[5].

Гіпотеза 1. *(Необхідна і достатня умова максимальності площі шарнірного чотирикутника)*

Шарнірний чотирикутник обмежує максимальну площу тоді і тільки тоді, коли він вписаний у коло.

Відразу виникає нова, споріднена гіпотеза:

Гіпотеза 2. *(Існування вписаного шарнірного чотирикутника)*

Для кожного шарнірного чотирикутника існує чотирикутник, вписаний в коло.

Експериментальна підтвердження або спростування гіпотез за допомогою пакета DG

Для експериментальної перевірки або спростування Гіпотези 1 доповнимо динамічне креслення "ЕС чотирикутник - 1" колом, що проходить через вершини A, B, C. Копію екрану відповідного динамічного креслення наведено на Рисунку 5.

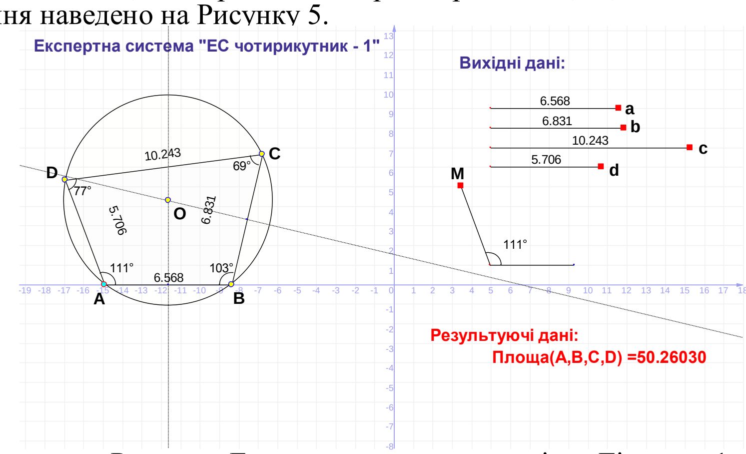

Рисунок Експериментальна перевірка Гіпотези 1
у пакеті DG.

[5] Насправді, ця гіпотеза є добре відомим фактом, який, зокрема, випливає з ізопериметричної властивості кола: із усіх замкнених кривих у площині найбільшу площу обмежує коло. Для доведення використовується "шарнірний метод" Я.Штейнера [2, с.190]. У даній замітці розглядаються **навчальні дослідження** і тому моделюється їх хід на основі матеріалу шкільного курсу математики.

Вибираючи різні значення параметрів чотирикутника можна впевнитися у тому, що кожен раз експериментально знайдений чотирикутник максимальної площі буде вписаним чотирикутником.

Звернемось до експериментальної перевірки Гіпотези 2. З одного боку, експерименти, проведені на попередньому етапі не дали підстав мати сумніви відносно Гіпотези 1. Але продовжимо експерименти, можливо вони наведуть на плідну ідею, яка може послужити основою для дедуктивного доведення справедливості Гіпотези 2. Спробуємо поступити інакше: побудуємо довільне коло за даним радіусом і від будь – якої точки на колі відкладемо дуги, які стягуються хордами, довжини яких дорівнюють послідовно довжинам сторін шарнірного чотирикутника a, b, c (очевидно, для того, щоб побудову можна було виконати, достатньо, наприклад вибрати радіус кола так, щоб він задовольняв умову $2r \geq a+b+c$). Радіус кола будемо використовувати як параметр. У динамічний напис будемо виводити довжину четвертої сторони чотирикутника. Це динамічне креслення було назване “Наближений розв’язок” задачі про максимальну площу шарнірного чотирикутника”, тому що його можна для цього використовувати: задати довжини трьох сторін *a, b, c* після чого радіус кола *r* вибрати таким, щоб він якомога ближче відповідав довжині четвертої сторони *d*. Експерименти з розробленим динамічним кресленням показують, що існувати вписані чотирикутники будуть при кожному значенні радіуса з інтервалу $[R, \infty[$, де R – радіус кола, вписаного у трикутник із сторонами *a, b, c*. Відповідні значення довжини четвертої сторони будуть варіюватися в інтервалі $[0, a+b+c[$. Оскільки довжина четвертої сторони є функція, яка неперервно залежить від радіуса описаного кола, то, при деякому значенні радіуса довжина четвертої сторони буде дорівнювати *d* (на основі вже згадуваної теореми про властивості функції, неперервної на інтервалі). Запропонований алгоритм побудови вписаного в коло чотирикутника для даного набору довжин сторін чотирикутника *a, b, c, d* дає першу необхідну і достатню умову існування шарнірного многокутника.

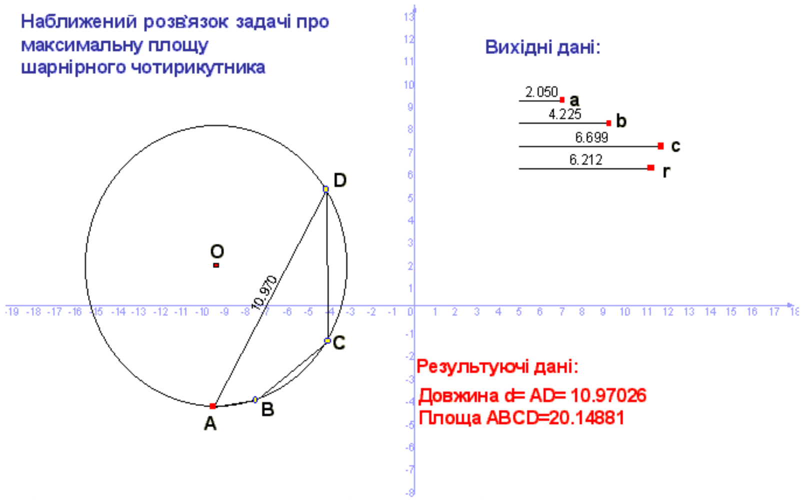

Рисунок Наближений розв’язок задачі про шарнірний чотирикутник максимальної площі у середовищі пакета DG

1 необхідна і достатня умова існування шарнірного многокутника

Якщо три відрізки із довжинами a, b, c утворюють трикутник, то для того, щоб існував шарнірний многокутник із довжинами сторін a, b, c, d, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова $d \leq a+b+c$.

А що буде у випадку, якщо три відрізки із довжинами *a, b, c* утворюють трикутник? Комп’ютерні експерименти з тим же динамічним кресленням і в цьому випадку підкажуть необхідну і достатню умову, обґрунтування якої залишимо читачеві:

2 необхідна і достатня умова існування шарнірного многокутника

Якщо три відрізки із довжинами a, b, c не утворюють трикутник (для визначеності припустимо, що найбільша сторона має довжину a), то для того, щоб існував шарнірний многокутник із довжинами сторін a, b, c, d необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова $a-(b+c) \leq d \leq a+b+c$.

Доведення гіпотез 1 і 2

Запропонований вище алгоритм наближеної побудови вписаного шарнірного многокутника у сукупності з теоремою про властивості функцій, неперервних на відрізку, дають доведення справедливості гіпотези 2.

Доведення Гіпотези 1 *(Д. Пойа)*

Доведення Гіпотези 1 наведено в [2, с. 192-195] і проводиться як низка теорем, що доводяться у дусі шарнірних механізмів Я.Штейнера. Сформулюємо ці теореми у вигляді відкритих задач, кожну з яких можна досліджувати у середовищі пакета DG.

Задача 1

У трикутнику відомі дві сторони a і b. За яких умов цей трикутник має найбільшу можливу площу?

Відповідь: у тому випадку, коли він прямокутний і відомі сторони служать його катетами).

Задача 2

У чотирикутнику (многокутнику) задані всі сторони, крім одної. За яких умов цей чотирикутник (многокутник) має найбільшу можливу площу?

Відповідь: у тому випадку, коли він уписаний у півколо, діаметром якого служить невизначена сторона.

Задача 3

За яких умов шарнірний многокутник обмежує найбільшу площу?

Аналітичне доведення Гіпотези 1 *(Горох В.П., усне повідомлення)*

Поділимо шарнірний многокутник *ABCD* діагоналлю *BD* на два трикутники *ABD* і *BCD*. Використовуючи теорему синусів, виразимо площу шарнірного чотирикутника:

(1) $S = \frac{1}{2}(ad\sin A + bc\sin C)$

Звідси отримаємо:

(2) $4S = 2(ad\sin A + bc\sin C)$

Виразимо діагональ *BD* за теоремою косинусів з трикутників *ABD* і *BCD* і прирівняємо отримані вирази:

(3) $a^2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 - 2bc\cos C$

Звідси отримуємо:

(4) $(a^2 + d^2) - (b^2 + c^2) = 2(ad\cos A - bc\cos C)$

Піднесемо до квадрату ліві і праві частини рівностей (2) і (4) і складемо отримані рівності. Після тотожних перетворень отримаємо:

(5) $$S^2 = \frac{1}{16}(-(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + d^2b^2 + d^2c^2) + 4(a^2d^2 + b^2c^2) - 8abcd\cos(A + C))$$

З (5) випливає, що свого найбільшого значення квадрат площі, а значить і величина самої площі, досягає у випадку, коли $\cos(A + C) = -1$. А це відбудеться, якщо сума протилежних кутів буде дорівнювати 180°, тобто у випадку, коли чотирикутник вписаний у коло, що і потрібно було довести[6].

Наближений розв'язок задачі про шарнірний чотирикутник максимальної площі у середовищі пакета DG

Наведене вище динамічне креслення (див. рисунок 6) можна використовувати для наближеного розв'язування задачі про шарнірний многокутник максимальної площі, наближеного визначення максимальної площі шарнірного чотирикутника, радіуса кола, описаного навколо чотирикутника максимальної площі.

Теми наступних навчальних досліджень

Після успішного проведення навчальних досліджень стосовно чотирикутників, учням можна запропонувати їх розвинення у напрямку довільних многокутників, наприклад:

1. Доведення теореми: для того, щоб шарнірний многокутник обмежував найбільшу площу необхідно і достатньо, щоб він був вписаний у коло.
2. Дослідження умов, при яких шарнірні многокутники обмежують найбільшу площу.
3. Побудова у середовищі пакета DG динамічних креслень – "Експертних систем", які дозволяють наближено розв'язувати задачу про визначення кола, в яке може бути вписаний заданий шарнірний многокутник, його радіуса, многокутника максимальної площі для заданого шарнірного многокутника (окремо для п'ятикутника, шестикутника, і т.д.).
4. Ознаки рівності многокутників.
5. Побудова у середовищі пакета DG "Експертних систем", які дозволяють наближено "розв'язувати многокутники" – визначати якомога більше їх параметрів для кожної ознаки рівності многокутників даної розмірності (п'ятикутників, шестикутників, і т.д.)

ЛІТЕРАТУРА

1. E.Pehkonnen. Use of open-ended problems in mathematical classroom. – Helsinki University (Finland), Research Report 176, 1997. – 130 p.
2. Д.Пойа. Математика и правдоподобные рассуждения. М:.«Наука», 1975.– 464 с.
3. Г.Вейль, Математическое мышление. М:., «Наука». 1989. – 400 стр.

[6] Зауважимо, що з (5) випливає узагальнення теореми Герона для чотирикутників: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - 16\cos^2((A+C)/2)}$. Еквівалентність (5) і узагальненої теореми Герона можна довести у середовищі пакета комп'ютерної алгебри Derive.