Л.В. Ізюмченко, І.В. Лупан
Кіровоградський державний педагогічний університет
імені Володимира Винниченка

GRAN2d на факультативних заняттях з геометрії

У шкільному курсі геометрії приділяється увага послідовному викладенню доведення теорем, логічному обґрунтуванню різних етапів розв'язування задачі чи доведення твердження. А сам процес пошуку розв’язку задачі чи способу доведення, процес відкриття нових математичних фактів у повсякденній шкільній практиці розглядається значно рідше. Між тим саме власні відкриття, математична творчість є на думку багатьох вчених чи не найпотужнішим фактором розвитку мислення дитини [1].

Особливо великі можливості для формування навичок творчого мислення надаються на факультативних заняттях. Пропонуємо добірку задач, які розглядались на факультативних заняттях з геометрії у дев’ятому класі. Задачі розв’язувались у середовищі *GRAN2d* [2], що дало можливість швидко виконувати рисунок до умови задачі та необхідні обчислення.

Розв’язування нестандартних задач допомагає розвитку інтуїції, навичок самостійного пошуку нових закономірностей, математичного мислення, формуванню цілеспрямованості, наполегливості учнів.

Пропоновані задачі можна умовно поділити на кілька груп. До першої групи включено досить прості задачі, розв’язки яких інтуїтивно очевидні, але точні обчислення є досить трудомісткими.

Такими є задачі 1 і 2. Креслення до них наведено на рис. 1а, а порядок його виконання у середовищі *GRAN2d* та результати обчислень – на рис. 1б.

Задача 1. Пара протилежних сторін довільного опуклого чотирикутника поділена на *5* рівних частин і відповідні точки протилежних сторін з’єднані. Перевірте, що площа середнього чотирикутника *CDJI* в *5* разів менша площі вихідного чотирикутника *AFLG* [3].

Задача 2. Пара протилежних сторін довільного опуклого чотирикутника поділена на *m* рівних частин, а інша пара – на *n* рівних частин, і відповідні точки протилежних сторін з’єднані (числа *m* і *n* – непарні). Перевірте, що площа середнього чотирикутника *QRST* в $m{\cdot}n$ разів менша за площу вихідного чотирикутника *AFLG* ($m=5;\ n=3$) [3].

Наступну групу складають задачі, які містять цікаві, невідомі для учнів факти. Задачі даної групи покликані стимулювати пізнавальний інтерес учнів. Середовище *GRAN2d* на даному етапі є інструментом для експериментальної перевірки запропонованих в умові гіпотез.

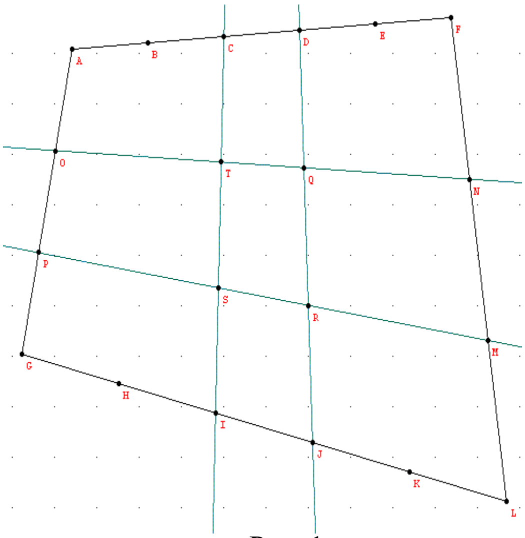


Рис. 1а

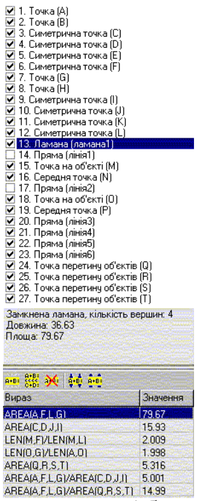
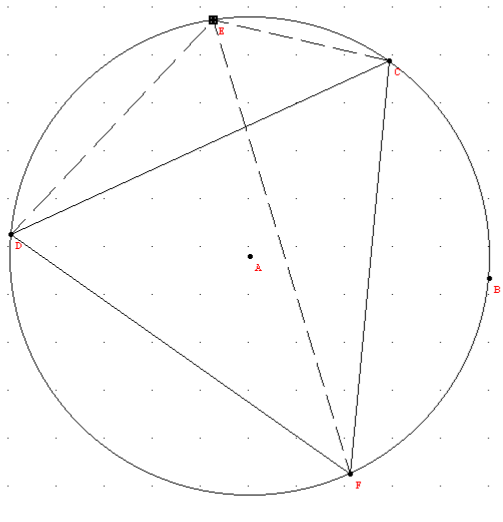


Рис. 1б

Задача 3. Точка *E* лежить на колі ω*(A; r=AB)*, описаному навколо правильного трикутника *CDF*. Перевірте, що сума *EC4+ ED4+ EF4* не залежить від вибору точки *E* на колі (і дорівнює *18·R4*) [3].

На рисунку 2 подано креслення, порядок його побудови та обчислення до задачі 3. Важливо, що точку *E* створено як точку на колі. Тому у *GRAN2d* її можна рухати по колу, спостерігаючи, чи змінилися при цьому результати обчислень.



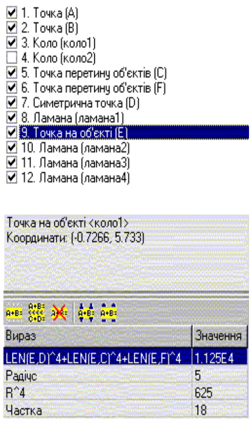


Рис. 2а Рис. 2б

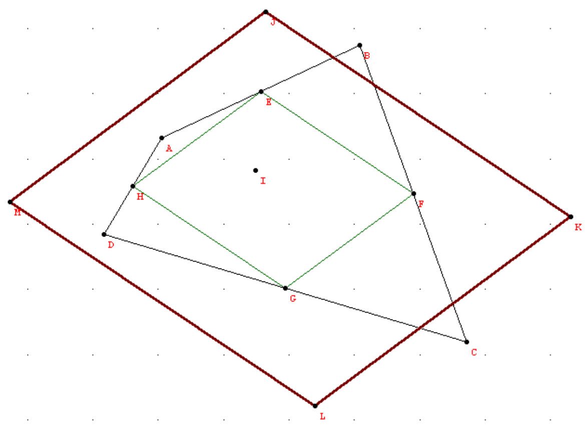
Задачі першої і другої груп є підготовчими. До третьої групи включено задачі, при розв'язуванні яких висунуте в умові припущення спочатку потрібно емпірично перевірити засобами графічного середовища, а потім аналітично довести.

Задача 4. Дано опуклий чотирикутник *ABCD* з площею *S*. Всередині нього (довільно) вибирається точка *I* і відображається симетрично відносно середин усіх сторін:

а) доведіть, що площа утвореного чотирикутника дорівнює *2·S* [4];

б) доведіть, що площа чотирикутника, вершинами якого є середини сторін чотирикутника *ABCD*, дорівнює *½·S* [3].

Креслення, порядок побудови та результати обчислень наведено на рис. 3а та рис. 3б.



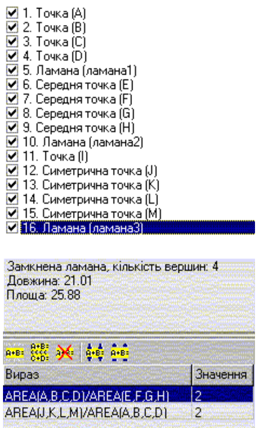
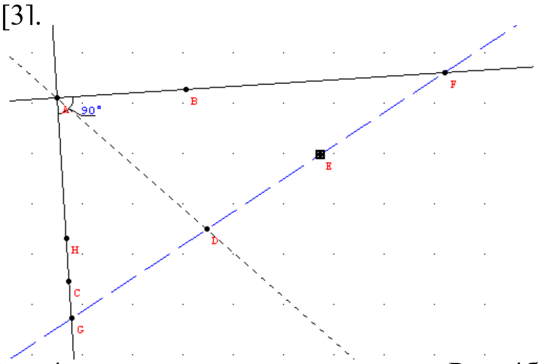


Рис. 3а Рис. 3б

Задача 5. На бісектрисі прямого кута взято точку *D*. Через неї проведено довільну пряму, яка відтинає на сторонах кута відрізки довжиною *a* і *b*. Доведіть, що величина $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ не залежить від вибору цієї прямої [3].



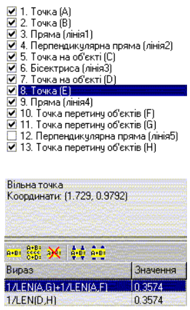
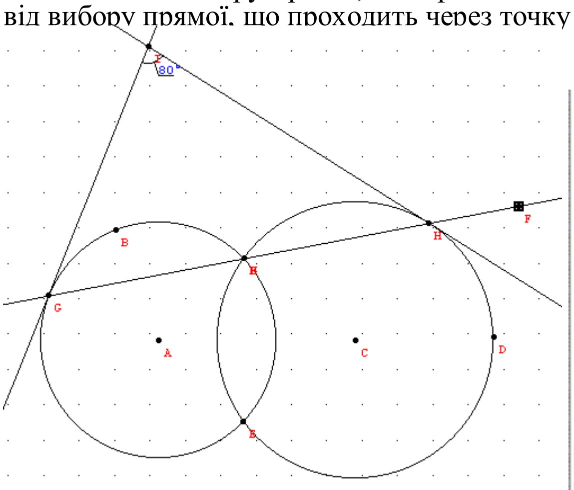


Рис. 4а Рис. 4б

Креслення та обчислення наведено на рис. 4а, 4б. Змінювати положення довільної прямої можна, рухаючи точку *E*, через яку дану пряму проведено. Аналітичний розв'язок такий: нехай відстань від точки *D* до прямої *AC* дорівнює *h*. З подібності двох прямокутних трикутників: великого *GAF* (з катетами *a* і *b*) і маленького *GHD* (з катетами *a*-*h* та *h*) маємо: $\frac{a-h}{h}=\frac{a}{b}$, а тоді $b(a-h)=ah$; $ah+bh=ab$; поділивши на abh, маємо $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{h}$. Отже, вказана сума не залежить від вибору прямої, що проходить через точку *D*, а залежить тільки від розташування точки *D* на бісектрисі (тобто від відстані точки *D* до сторін кута).

Задача 6. Кола $\omega 1(A;\ r=AB)$ і $\omega 2(C;\ R=CD)$ перетинаються у точках *E* і *E1*. Через точку *E* проведено пряму *EF*, яка перетинає кола $\omega 1$ і $\omega 2$ в точках *G* і *H* відповідно. В точках *G* і *H* до кіл проведені дотичні, які перетинаються в точці *I* (рис. 5а, 5б). Доведіть, що $\angle GIH$ (між дотичними) не залежить від вибору прямої, що проходить через точку *E* [3]. Доведіть, що кут $\angle GE1H$ не залежить від вибору прямої, що проходить через точку *E* [5].



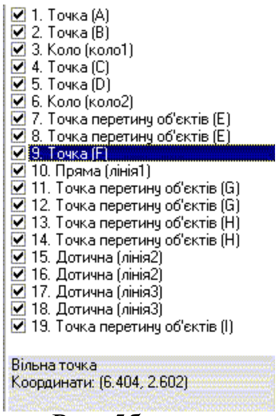
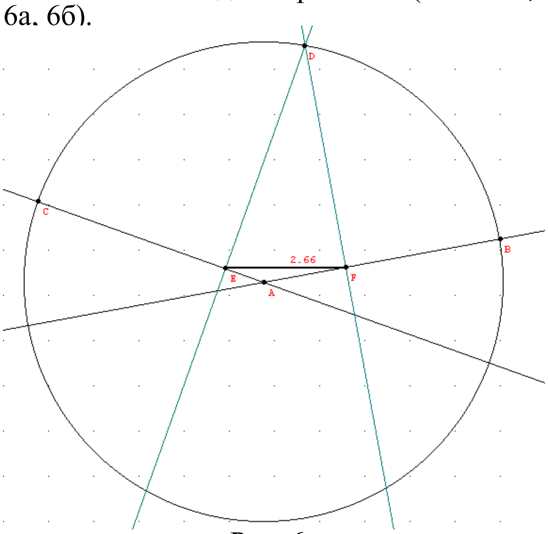


Рис. 5а Рис. 5б

Розв'язування. Оскільки *IH* – дотична до $\omega 2$, то $\angle IHG=\frac{1}{2}\smile EH=\angle EE1H$; аналогічно $\angle IGH=\angle EE1G$. Тоді $\angle GIH = 180°-(\angle IHG+\angle IGH)=180°-(\angle EE1H+\angle EE1G)=\angle E1GH+ \ +\angle E1HG$; кожен з цих кутів сталий, так як спирається на сталі дуги $\smile EE1$ кіл $\omega 1$ та $\omega 2$. Тому $\angle GIH$ не залежить від вибору прямої, що проходить через точку *E*.

Задача 7. Нехай *D* – довільна точка кола $\omega(A;\ r=AB)$, а *E* і *F* – її проекції на радіуси (діаметри) *AC* і *AB* кола. Доведіть, що довжина відрізка *EF* не залежить від вибору точки *D* на колі [3], [4].

Розв'язування. Оскільки $DF\perp AB$ і $DE\perp AC$, то кути $\angle DEA=\angle DFA=90°$, а тому точки *E* і *F* лежать на колі з діаметром *AD* (точки *A, D, E, F* лежать на колі постійного радіуса $\frac{1}{2}\cdot AD=\frac{1}{2}\cdot r$) (рис. 6а, 6б).



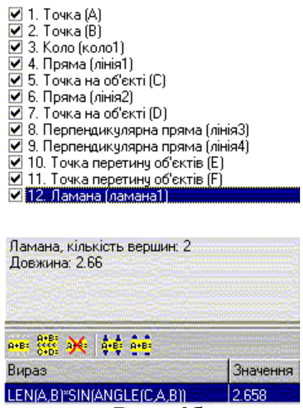


Рис. 6а Рис. 6б

При цьому або $\angle EAF=\angle CAB$ або $\angle EAF=180°-\angle CAB$, а тому довжина хорди *EF* стала. (Наступне завдання можна сформулювати так: оцінити довжину відрізка *EF*, порівняти з $R\cdot Sin\alpha$, де α – кут між діаметрами. Більш підготовленій аудиторії можна запропонувати висунути гіпотезу про довжину відрізка *EF* та аналітично її підтвердити).

При розв'язуванні вищенаведених задач за допомогою графічного середовища *GRAN2d* в учнів є можливість експериментувати з умовою задачі, змінювати рисунок, доки не буде емпірично підтверджено існування того чи іншого математичного факту. Після цього слід переходити до строгого математичного доведення.

На факультативних заняттях можна пропонувати і прості, і складні задачі. На деяких треба акцентувати особливу увагу. Це стосується, зокрема, задач, при розв'язуванні яких застосовуються факти, що використовуються в більш складних (олімпіадних, конкурсних) задачах. Так, розв'язок досить простої задачі 8 покладено в основу розв'язку конкурсних задач 9 та 10.

Задача 8. Дві прямі, що виходять з точки *C*, дотикаються до кола $\omega(A;\ r=AB)$. На меншій з двох дуг, обмежених цими точками, взято довільну точку *D* і через неї проведено третю дотичну *EF*, що перетинає *CG* і *CF* відповідно в точках *E* і *F*. Довести, що периметр ΔCEF не залежить від зміни положення точки *D* на колі [5] **(**рис. 7а, 7б**)**.

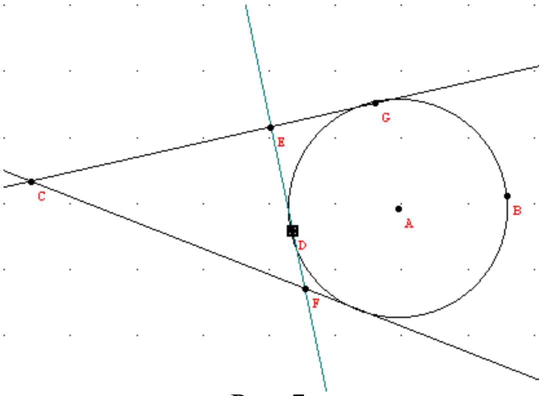


Рис. 7а

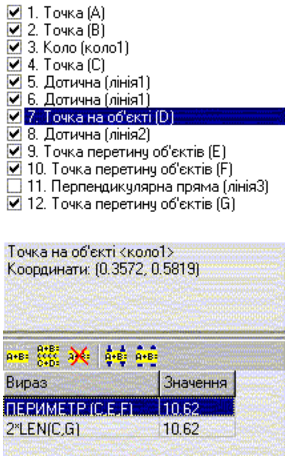


Рис. 7б

Розв'язування. З рівності двох прямокутних трикутників $\Delta AGE=\Delta ADE$ (за катетом і гіпотенузою) маємо $GE=ED$. А тоді $CE+ED=CE+GE=CG$. Аналогічно маємо $CF+FD=CG1=CG$ (де $G1$ – точка, симетрична до точки G відносно AC). А тоді периметр трикутника CEF: $P=CE+EF+FC=CE+(ED+DF)+FC=2\cdot CG$.

Знаючи цей факт, досить нескладно розв'язати наступні 2 олімпіадні задачі.

Задача 9. Дано кут і точку, яка міститься поза ним. Провести через цю точку пряму так, щоб вона відтинала від кута трикутник заданого периметра [6].

Розв'язування зводиться до відкладання на сторонах даного кута півпериметра (це будуть точки дотику допоміжного кола, центр якого можна отримати, побудувавши в отриманих точках перпендикуляри до їхнього перетину) та побудови дотичних з даної точки поза кутом. Одна з дотичних (що лежить зовні) – сторонній розв'язок, інша – внутрішня – відтинає від кута потрібний трикутник.

Задача 10. Побудувати трикутник, знаючи його периметр, кут $\angle A=\alpha$ і висоту hA, проведену з вершини цього кута [4].

Розв'язування задачі зводиться до побудови:

– даного кута, відкладанні на його сторонах півпериметра, побудови допоміжного кола, що дотикається до сторін кута в цих точках;

– кола з центром у вершині кута радіуса hA;

– побудови спільної дотичної (внутрішньої) до побудованих двох кіл, яка відтинає від кута шуканий трикутник.

Зауваження. Задача має єдиний розв'язок тільки тоді, коли існує внутрішня дотична до двох кіл.

І нарешті, останній тип задач, що ми пропонуємо, це задачі дослідницького характеру, де комп'ютер використовується з метою перевірки власної гіпотези чи її спростування (після чого, знову ж таки, вимагається строго обґрунтувати розв'язок задачі).

Задача 11. Дано два концентричні кола. Доведіть, що сума квадратів відстаней від точки одного кола до кінців діаметра іншого кола не залежить ні від обраної точки, ні від обраного діаметра **[7]**.

Розв'язування. Нехай дані кола: $\omega 1(A;\ r=AB)$ і $\omega 2(A;\ R=AC)$. BF – діаметр першого кола, $G\in\omega 2$ (рис. 8а, 8б). Вибираємо систему координат з центром у точці A. Тоді координати точок B – $x1;y1$, F – $-x1;-y1$, адже вони симетричні відносно початку координат; координати точки G – $x_2;y_2$. Тоді $GF_2+GB_2=[(x2+x1)_2+(y2+y1)_2]+\ \ +[(x2–x1)_2+(y2–y1)_2]=2[(x1+y1)_2+(x2+y2)_2]=const$ (оскільки точка $B(x_1;y_1)\in\omega 1$, то її координати задовольняють рівняння кола і $x1_2+y1_2=r_2$; $G\in\omega 2$, тому $x2_2+y2_2=R_2$). Аналогічне доведення для другого випадку, коли взято діаметрально протилежні точки C та D кола $\omega 2$ і точку E на колі $\omega 1$.

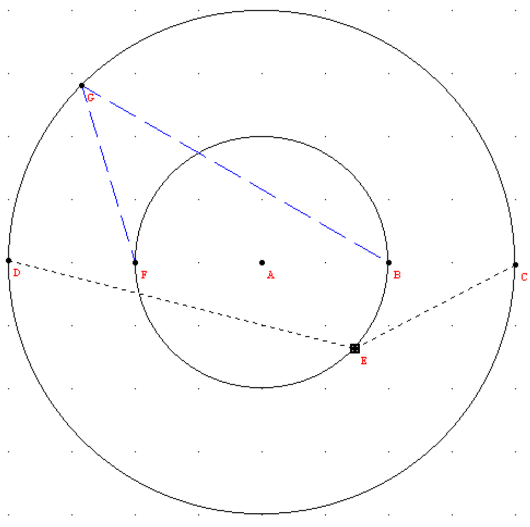


Рис. 8а

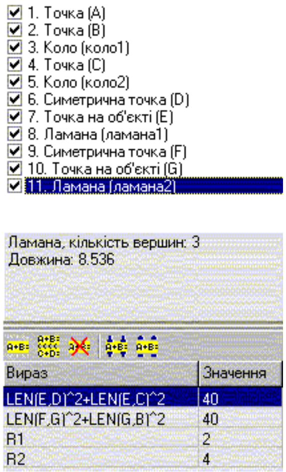


Рис. 8б

Зауваження. Поділ задач на типи досить умовний. Адже задачу 3 можна легко переформулювати так, що потрібно буде спочатку висунути гіпотезу, порівняти вказану суму з *R4*, а потім вже шукати обґрунтування, чому вона саме у *18* разів більша за *R4*. Якщо знань дослідників недостатньо для обґрунтування розв'язків задач 6–7, їх можна віднести до першого типу задач (задачі на перевірку без доведення) і т. ін.

Для самостійного опрацювання пропонувалася така задача.

Задача 12. В кут $\angle ABC$ вписані 2 кола, що не перетинаються: $\omega1(D;\ r=DF);\omega2(E;R=EG)$, точки дотику кіл $G\in AB,\ F\in BC$. Довести, що кола $\omega1$ і $\omega2$ відтинають на прямій FG хорди однакової довжини [4].

Вказівка до розв'язування. Розгляньте і другі точки дотику $G`\in BC,\ F`\in AB$ даних кіл до сторін кута. Нехай точки I та H – точки перетину січної GF з колами $\omega1$ та $\omega2$ відповідно. Тоді – GF – січна, $GF`$ – дотична до $\omega1$: $GF\cdot GI=GF`_2$; GF – січна, $G`F$ – дотична до $\omega2$: $GF\cdot HF=G`F_2$. З рівностей $BG=BG`$; $BF=BF`$ маємо рівність $GF`=G`F$, а тоді $GI=HF`$; так як $GI=GH+HI$; $HF=FI+HI$. А тому $GH=IF$.

Розв'язування таких задач оправдане перш за все тим, що сприяє досягненню однієї з найважливіших цілей навчання математики в школі – розвитку абстрактного мислення, просторової уяви, творчих здібностей учнів, підвищенню рівня їх загального розвитку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Пейперт С. Переворот в сознании: Дети, компьютеры и плодотворные идеи: Пер. с англ./ Под ред. А.В. Беляевой, В.В. Леонаса. – Москва: Педагогика, 1989. – 224 с.
2. Жалдак М.І., Вітюк О.В. Комп'ютер на уроках геометрії: Посібник для вчителів. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2000. – 168 с.
3. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии, ч. I. – М.: Наука, 1986. – 272 с.
4. Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады. – М.: Просвещение, 1986. – 303 с.
5. Горделадзе Ш.Г., Кухарчук М.М., Яремчук Ф.П. Збірник конкурсних задач з математики. – Київ: Вища школа, 1977.– 324 с.
6. Михайловський В.І., Ядренко М.Й., Призва Г.Й., Вишенський В.А. Збірник задач республіканських математичних олімпіад. – Київ: Вища школа, 1979. – 264 с.
7. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. Геометрія. 11 клас. За ред. З.І. Слєпкань. – Харків, "Гімназія", 2002. – 176 с.