**Information security as part of a social pedagogue's professional activity**

***Kostiuchenko A. M.***

**Annotation.** The article reveals the essence of the concept of information security, there are reviewed the features of teaching and upbringing of children of all ages during their mastery of the latest technologies. The advices for parents, teachers and social workers to improve the safety of socialization of children of all ages in the information environment are suggested. The recommendations for social pedagogues how to carry out educational, pedagogical arrangements and preventive out-of-school activities, training methods aimed at overcoming the negative effects of computer technologies on children of different age categories are given. There are indicated further prospects of research, namely to develop practical recommendations for would be social pedagogues and introducing them to professional activities.

**Key words:** information security, informatics competence, information culture, information and technological culture, computer technologies, age periodization, professional activity, training methodologies.

**УДК 004.04**

**Біляй Ю. П., Іщук А. А.**

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

## Деякі методи розв'язування задач стохастичного програмування

**Анотація** В статті розглянуто деякі методи розв'язування задач стохастичного програмування. Розглянуто динамічні ймовірнісні моделі, в яких цільова функція та функції, за якими визначається множина допустимих розв'язків, залежать від випадкових параметрів. Розглянуто способи розв'язування задачі за допомогою різних програмних засобів. Проаналізовано доцільність використання того чи іншого програмного засобу, залежно від завдання, обраного в дослідженні.

**Ключові слова:** стохастичне програмування, математична модель, оптимізація.

Нові досягнення математики з урахуванням розвитку персональних комп'ютерів знаходять широкі застосування в різних галузях досліджень, особливо економічних. За досить довгий час накопичено досить значний досвід постановки і розв'язування різних задач за математичними методами.

В практиці нерідко зустрічаються задачі оптимізації, у яких вихідні дані є випадковими або невизначеними. Задачі такого типу розв'язуються за методами стохастичного програмування. В таких задачах випадковими можуть бути елементи матриці планування перевезень вантажів в транспортній задачі, об'єми потреб ресурсів (праві частини обмежень), ціни, число покупців у магазинах, кількість пасажирів на авіалініях, запаси сировини і т.д. Отже, якщо через наявність якихось причин неможливо точно визначити значення параметрів досліджуваної проблеми, то така проблема належить до стохастичних, а моделі та методи, що застосовуються для розв'язування задач з випадковими і невизначеними параметрами, називаються моделями і методами стохастичного програмування [4, с. 356].

Перші роботи, зокрема Дж. Тінтнера, М. Бабера, Дж. Сенгупта, М. Фабера, зі стохастичного програмування з'явилися в 50-х роках XX століття.

Стохастичні задачі з імовірнісними обмеженнями вперше були розглянуті в роботі А. Чарнса, В. Купера і Дж. Саймондса [7].

Стохастичні задачі зі статичними обмеженнями і методи розв'язування задач стохастичного програмування наведені в роботі Д. Б. Юдіна [6].

Серед моделей стохастичного програмування значне місце займають динамічні імовірнісні моделі. Дослідження в постановці та аналізі таких задач відносно нечисленні. Тут можна назвати роботи А. Чарнса і М. Кірбі, М. Айзнера, Р. Каплана і Дж. Содена, Д.Б. Юдіна, Н.З. Шора, Е.В. Цоя.

Таким задачам стохастичного програмування, як транспортна задача, задача про розподіл ресурсів, присвячені роботи А. Вільямса, Б. Беряну, М. Ель-Агізі, В. Шварца та ін.

Спроби отримати загальний підхід до розв'язування задач стохастичного програмування робилися в роботах І. Лемарі, Д. Б. Юдіна [5], Ю.М. Єрмольєва [3].

Стохастичне програмування – це теорія і методи розв'язування оптимізаційних задач стохастичної природи, тобто задач, в яких цільова функція та функції, за якими визначається множина допустимих розв'язків, залежать від параметрів, з випадковими значеннями [1, с. 504].

Загальна задача математичного програмування полягає у відшуканні мінімального (чи максимального) значення цільової функції $f(x)$ на певній множині $X$ допустимих точок, заданій через систему обмежень $g_i(x) \le 0,\ i = 1,2,\dots,m.$ Якщо цільова функція задачі математичного програмування або функції, за якими визначають множину допустимих розв'язків, залежать від деяких випадкових величин, то таку задачу називають *задачею стохастичного програмування* [2, с. 117]. Такі задачі виникають у випадках планування в ситуаціях з невизначеністю і ризиком. Основні особливості цього класу задач пов'язані з відсутністю детермінованих даних про цільову функцію і функції обмежень у аналітичному поданні. Прикладом формалізації задачі стохастичного програмування є така задача: знайти мінімум (чи максимум) функції

$$f(x,E)$$

за обмежень

$$g_i(x,E) \le 0, \quad i = 1,2,\ldots,m,$$

$$x \in \Omega_X,$$

де $\Omega_X$ – деяка підмножина простору $R^n$, $E \in \Omega$ – елемент деякої множини $\Omega$ елементарних подій, за якою побудовано ймовірнісний простір $(\Omega, S, P)$, $S$ – $\sigma$-алгебра підмножин множини $\Omega$, тобто сукупність подій, до якої включаються вірогідна подія $\Omega$ та неможлива подія $\varnothing$, і яка замкнена відносно операцій переходу до протилежної події, зчисленного об'єднання і зчисленного перетину підмножин з $\Omega$, які є елементами сукупності $S$, $P$ – ймовірнісна міра на вимірному просторі $(\Omega, S)$.

Задачу стохастичного програмування часто розглядають як задачу мінімізації математичного сподівання деякої функції від $x$ і $E$, тобто

$$Mf(x,E) \to \min!,$$

за обмежень

$$Mg_i(x,E) \le 0, \; i = \overline{1,m},$$

$$x \in \Omega_X, \; E \in \Omega.$$

Крім того, розглядають й інші постановки задач стохастичного програмування, наприклад, мінімізувати ймовірність того, що значення деякої функції, яка залежить від $x$ і $E$, перевищуватиме деяке число, тобто

$$P\{E \mid f(x,E) \ge \alpha\} \to \min!,$$

за умов

$$P\{E \mid g_i(x,E) \le 0\} \ge \beta_i, \; i = \overline{1,m},$$

$$x \in \Omega_X, \; E \in \Omega,$$

де $\alpha$ і $\beta_i$, $i = \overline{1,m}$, – деякі дійсні числа, причому $\beta_i \in (0;1)$.

Через наведені формалізації не вичерпуються всі можливі постановки задач стохастичного програмування, але наведені є типовими.

За цільовою функцією в задачі стохастичного програмування може визначатися [1, с. 504]:

- ймовірність попадання розв'язку в деяку область (*P-моделі*);
- математичне сподівання деякої функції від розв'язку (*M-моделі*);
- дисперсія деякої функції від розв'язку (*D-моделі*).

Для розв'язування задач стохастичного програмування широко застосовують сучасні програмні засоби, зокрема Microsoft Excel, для визначення числових характеристик розподілів ймовірностей на множині значень випадкової величини та самих розподілів, необхідних для розв'язування стохастичних задач (в тому числі і стохастичних транспортних задач). Перевагою Microsoft Excel є універсальність. Однак розв'язування задач великих розмірностей за допомогою Microsoft Excel може бути неефективним через великі витрати часу. У такому разі задачі стохастичного програмування можна спробувати розв'язувати за допомогою програмного засобу MathCAD, web-орієнтованої системи Network Enabled Optimization System та ін.

Розглянемо загальний вигляд прикладної задачі. Нехай потрібно виготовити суміш найменшої вартості з наявних продуктів, якщо відомі характеристики кожного з наявних продуктів за речовинами та норми, яким повинна відповідати суміш.

Припустимо, що відсотковий склад першої речовини в кожному з $n$ продуктів складає $b_i, i \in \overline{1,n}$. Відсотковий склад першої речовини у кінцевій суміші повинен бути не менше $B$. Вміст другої речовин в розглянутих компонентах становить $\eta_i, i \in \overline{1,n}$, причому всі $\eta_i$ – це випадкові величини з нормальними розподілами ймовірностей на множинах $\Omega_i$ їх значень з параметрами відповідно $\mu_i$ та $\sigma_i^2$. Вміст жиру в їжі має бути не менше $T\%$ за ймовірності $p$. Ціни розглянутих компонентів – $r_i, i \in \overline{1,n}$, відповідно. Потрібно мінімізувати вартість суміші. Для цього розглянемо функцію $z$ від аргументів $x_i, i \in \overline{1,n}$ – відсоткових кількостей речовин у суміші.

$$z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot x_i \to \min!$$

за обмежень

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \cdot x_i > B \\ P_z(\sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i x_i \geq T) \geq p \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ x_i \geq 0, \ i \in \overline{1,n}. \end{cases}$$

Для прикладу розглянемо таку задачу, коли $n = 2$.

Нехай $B = 2.9,\ T = 21,\ p = 0{,}8,$

| № | $b_i$ | $\mu_i$ | $\sigma_i^2$ | $r_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2.60 | 15.0 | 0.2809 | 24.55 |
| 2 | 5.60 | 40.0 | 20.250 | 26.75 |

Враховуючи обмеження $x_1 + x_2 = 1,$ звідки $x_2 = 1 - x_1,$ перейдемо до розгляду функцій однієї змінної, замінивши $x_2$ на $1 - x_1$. Таким чином систему обмежень можна буде звести до системи лінійних нерівностей з однією змінною.

Потрібно мінімізувати значення функції $r_1 x_1 + r_2 x_2 \to \min!,$ або $r_1 x_1 + r_2(1 - x_1) = (r_1 - r_2)x_1 + r_2 \to \min!$ де $x_1 \in [0..1]$. Таким чином можна розглядати одну змінну $x$ з обмеженням $0 \leq x \leq 1$.

Підставивши в отриманий вираз цільової функції числові значення $r_1$ і $r_2$, отримаємо задачу мінімізації функції $z(x) = 26.75 - 2.2x \to \min!$. Очевидно мінімум функції $z(x)$ досягається за максимально можливого значення $x$ з врахуванням заданих обмежень, тобто отримуємо вираз

$$x \to \max!,\ x \in [0;1].$$

Розглянемо систему обмежень, враховуючи заміну змінних, за якої $b_1 x_1 + b_2 x_2 > B$ відповідно буде мати вигляд $5.6 - 3.3x > 3.9.$ Розв'язавши цю нерівність, отримаємо друге обмеження

$$x < 0.9.$$

Оскільки розподіли на множинах значень випадкових величин $\eta_i$ нормальні, то можна скористатись фактом, що сукупний розподіл ймовірностей на множині значень пари $(\eta_1;\eta_2)$ випадкових величин $\eta_1$ і $\eta_2$, тобто на множині $\Omega_{\eta_1} \times \Omega_{\eta_2}$ є також нормальним, причому для незалежних випадкових величин $\eta_1$ та $\eta_2$, якщо $Z = a\eta_1 + b\eta_2,$ то

$$\mu_Z = a \cdot \mu_\eta + b \cdot \mu_{\eta_2}, \sigma_Z = \sqrt{a^2 \cdot \sigma_{\eta_1}^2 + b^2 \cdot \sigma_{\eta_2}^2}\ .$$

Таким чином математичне сподівання випадкової величини $a\eta_1 + b\eta_2$ можна записати як функцію від змінної $x$ $-\mu(x) = (\mu_1 - \mu_2)x + \mu_2,\ \sigma(x) = \sqrt{\sigma_2^1 x^2 + \sigma_2^2(1-x)^2}.$ Для розглядуваного прикладу: $m(x) = 40 - 25x,\ \sigma(x) = \sqrt{20.5309x^2 - 40.50x + 20.25}\,.$

Одновимірний нормальний розподіл ймовірностей на числовій осі можна задати за допомогою функції щільності $f(t;\mu,\sigma) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. Ймовірність потрапити в інтервал $P((-\infty;t_0])$ можна обчислити за формулою $P((-\infty;t_0)) = \int\limits_{-\infty}^{t_0} f(t;\mu;\sigma)dt.$

Для прикладу розглянемо значення $t_0 = 21.$

Набір з начень даного інтеграла для значень $t$ називають функцією помилок (позначають $erf(t)$), або функцією Лапласа (інтеграл ймовірності) $2 \cdot erf(t) - 1 = \int\limits_{-\infty}^{t_0} f(t;\mu;\sigma)dt.$

Функція помилок не може бути подана через елементарні функції, але розклавши підінтегральний вираз у ряд Тейлора та почленно проінтегрувавши, можна отримати подання функції у вигляді ряду

$$erf\ x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} - \ldots \right).$$

Також функцію можна досить точно наблизити за допомогою виразу

$$erf(x) = \sqrt{e^{\frac{4x^2(2x^2\pi - 8x^2 + 3)}{11\pi - 32}}}$$

Оскільки $1 = P((-\infty;\infty)) = P((-\infty;t_0)) + P([t_0;\infty))$, то $P([t_0,\infty)) = 1 - P((-\infty;t_0))$.

$erfc(t)$ – додаткова функція помилок, $erfc(t) = 1 - erf(t)$.

Оскільки для даної задачі $t$ фіксоване, $t = 21$, а значення $\mu(x)$ та $\sigma(x)$ залежать від змінної $x$, то можна побудувати функцію $p(x) = erfc(x)$, як $p(x) = erfc(\frac{T - \mu(x)}{\sqrt{2}\sigma(x)}),\ x \in [0;1]$.

Значення даної функції – ймовірність того, що вміст другої речовини буде не менше $T$. Графік функції $P(x)$ зображено на Рис. 1.

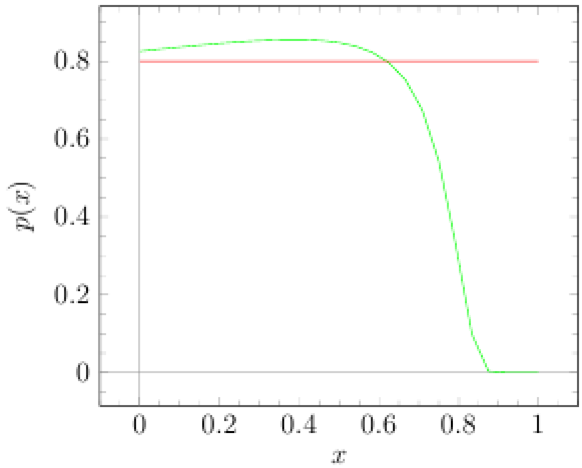



*Рис. 12*

Розв'язавши рівняння $p(x) \geq 0$, знайдемо проміжок обмеження

$$x < 0.62.$$

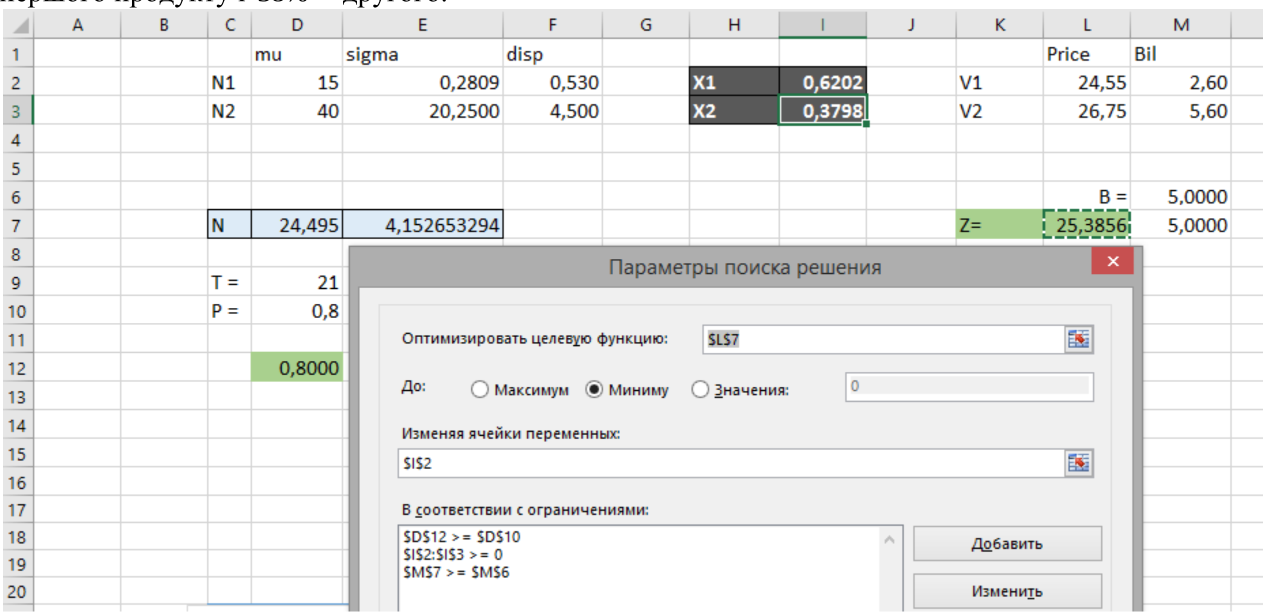
Таким чином отримуємо наступну систему обмежень:

$$x \to \max$$

$$\begin{cases} x \geq 0.8, \\ x \geq 0.62, \end{cases}$$

очевидно, що мінімум цільової функції досягається у точці $x_{\min} = 0.62$, $z_{\min}(0.62) = 26.75 - 2.2 \cdot 0.6202 = 25.386$.

Отже мінімум функції досягається, коли $x_1 = 0.62,\ x_2 = 0.38$, тобто для того, щоб витрати на виготовлення суміші були мінімальні і задані обмеження не порушувалися, потрібно взяти 62% першого продукту і 38% – другого.



| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | mu | sigma | disp | | | | | | Price | Bil |
| 2 | | | N1 | 15 | 0,2809 | 0,530 | | X1 | 0,6202 | | V1 | 24,55 | 2,60 |
| 3 | | | N2 | 40 | 20,2500 | 4,500 | | X2 | 0,3798 | | V2 | 26,75 | 5,60 |
| 4 | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | | B = | 5,0000 |
| 7 | | | N | 24,495 | 4,152653294 | | | | | | Z= | 25,3856 | 5,0000 |
| 8 | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | | | T = | 21 | | | | | | | | | |
| 10 | | | P = | 0,8 | | | | | | | | | |
| 11 | | | | | | | | | | | | | |
| 12 | | | | 0,8000 | | | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | | | | | | | | | | | | | |
| 17 | | | | | | | | | | | | | |
| 18 | | | | | | | | | | | | | |
| 19 | | | | | | | | | | | | | |
| 20 | | | | | | | | | | | | | |



*Рис. 13*

Таку саму відповідь отримаємо, якщо розглядувані дані внести до електронних таблиць Excel, та скористатись послугою «Пошук розв'язку», вказавши відповідні формули та обмеження, див Рис. *13*.

У таблиці 1 наведено приклад формул для необхідних обчислень

***Таблиця 2***

| ***Клітинка*** | ***Формула*** |
|---|---|
| I3 | 1-I2 |
| M7 | I2*M2+I3*M3 |
| D7 | D2*I2+D3*I3 |
| E7 | (F2*I2+F3*I3)*(F2*I2+F3*I3) |
| L7 | I2*L2+I3*L3 |

Щоб зрозуміти загальний принцип розв'язування задач даного типу, розглянемо аналогічну задачу для трьох параметрів.

Нехай $B = 2.9, T = 21, \; p = 0{,}8.$

| № | $b_i$ | $\mu_i$ | $\sigma_i^2$ | $r_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 9.00 | 15.0 | 0.2809 | 32.00 |
| 2 | 9.00 | 40.0 | 20.250 | 26.75 |
| 3 | 4.00 | 11.9 | 0.1936 | 32.00 |

Враховуючи обмеження $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, зробимо перехід до розгляду функції двох змінних, враховуючи, що $x_3 = 1 - x_1 - x_2$. Таким чином систему обмежень можна буде звести до системи лінійних нерівностей з двома змінними.

Побудуємо область допустимих значень для пар $(x_1; x_2)$ (Рис. 14).

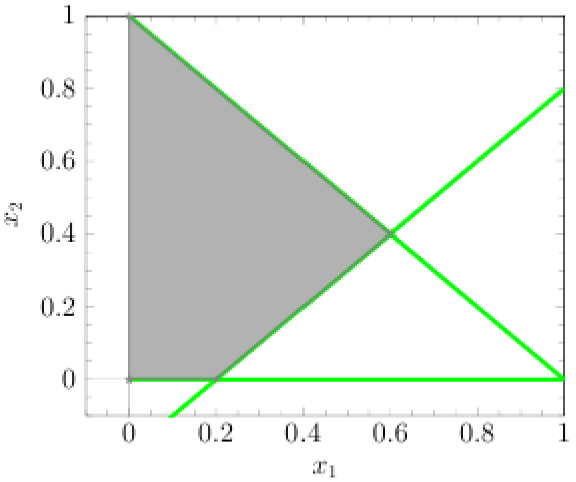



*Рис. 14*

Зробимо відповідні обчислення для випадкової величини від змінних $x_1, x_2, x_3$, за умови $x_3 = 1 - x_1 - x_2$. Числові характеристики випадкової величини, отриманої через композицію трьох випадкових величин з нормальними розподілами ймовірностей на множинах їх значень, з параметрами $\mu_i$ та $\sigma_i$, можна подати у вигляді функції від двох змінних:

$$\mu(x_1, x_2) = (\mu_1 - \mu_3)x_1 + (\mu_2 - \mu_3)x_2 + \mu_3$$

$$\sigma(x_1, x_2) = \sqrt{\sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_3^2 (1 - x_1 - x_2)^2}$$

Таким чином можна побудувати функцію $p(x_1, x_2) = erfc(x_1, x_2)$, як

$$p(x_{1,}, x_2) = erfc\left(\frac{T - \mu(x_2, x_2)}{\sqrt{2}\,\sigma(x_2, x_2)}\right), x_1, x_2 \in [0;1].$$

Її графік зображено на Рис. 15.

З Рис. 15 видно, що поверхня над площиною $z = 0.9$ задовольняє обмеження на змінні, подані у задачі. На Рис. 15, Рис. 16 та Рис. 17 зображено контури, утворені перетином поверхні $p(x_1, x_2)$ та площин $z_1 = 0.5$, $z_2 = 0.6$, $z_3 = 0.7$, $z_4 = 0.8$, $z_5 = 0.9$, $z_6 = 0.925$, $z_7 = 0.95$

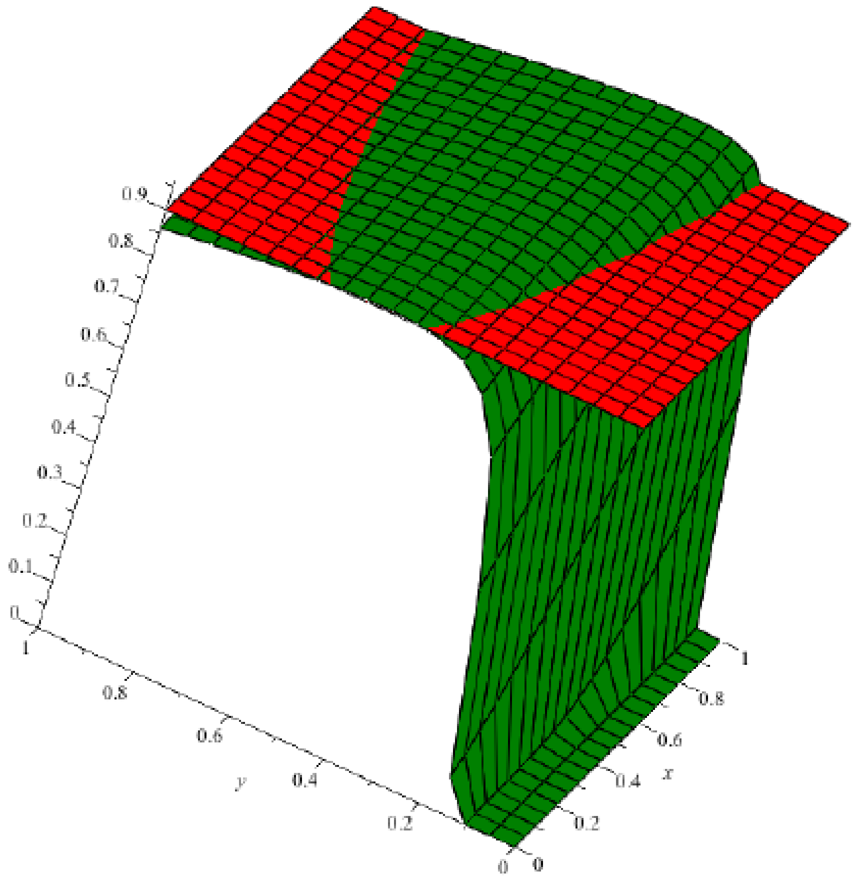



*Рис. 15*

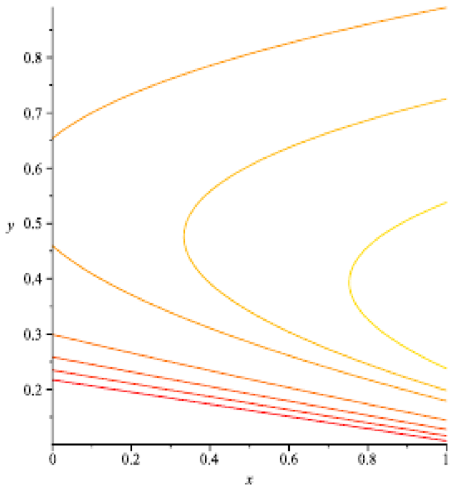



*Рис. 16*

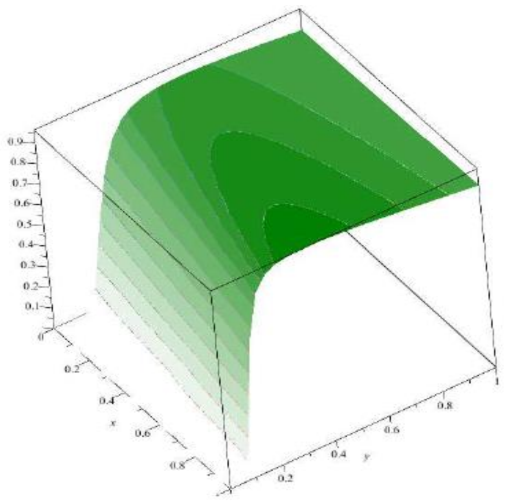


*Рис. 17*

Дану задачу можна розв'язувати за допомогою систем комп'ютерної математики, зокрема Maple.

Мінімальне значення функції за вказаних обмежень буде дорівнювати – $z_{\min}(0.6680,\ 0.0000,\ 3096) = 29.415$.

Ще одним способом розв'язування такого типу задач може бути програмування методів уточнення коренів, наприклад, такого, як модифікований метод дихотомії (метод ділення навпіл). Метод дихотомії полягає в уточненні відповіді через поділ багатовимірного паралелепіпеда на паралелепіпеди менших розмірів, довжини сторін яких дорівнюють половині початкових. Зокрема для випадку чотиривимірного простору вихідний паралелепіпед буде поділено на 16 менших. На кожному з них визначається значення функції та обирається найменше (найбільше) з них. Обраний паралелепіпед вважається початковим і кроки уточнення повторюються. Оскільки функція є гладкою, то таким чином можна визначити градієнт – напрямок найшвидшого зростання функції. Такий процес уточнення можна продовжувати до тих пір, поки не буде досягнуто потрібну точність обчислень.

Приклад результатів роботи за програмою для розв'язування задач даного типу продемонстровано на Рис. 18.

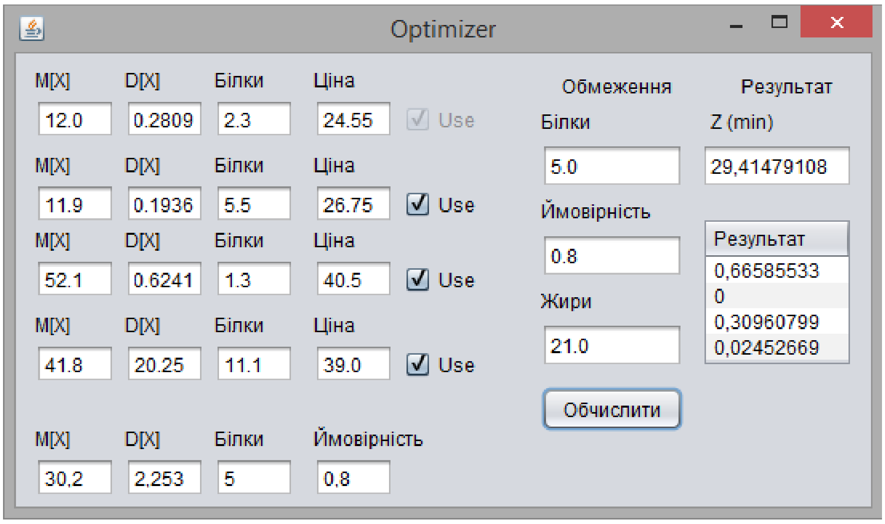



*Рис. 18*

Якщо розв’язувати дану задачу за допомого MSExcel, то результат буде аналогічний. Для обраних даних значення, знайдене за допомогою MSExcel, дорівнює $z_{\min} = 29.41497$, а обчислене за наведеною програмою $z_{\min} = 29.41479$.

Отже, вибір способу розв’язування задач даного типу залежить від наступних параметрів:

– кількість змінних – розмірність простору;

– наявність програмних засобів (прості електронні таблиці, системи комп’ютерної математики, власні програми);

– Точність, з якою потрібно обчислити результат.

Якщо кількість змінних невелика і можна графічно подати область обмежень, то можна скористатись графічними методами. Якщо розмірність системи обмежень велика, то доцільно використовувати спеціальні програмні продукти, наприклад Maple. Якщо важливою є висока точність обчислень, то краще використовувати програмні продукти, розроблені спеціально для такого класу задач.

### Список використаних джерел

1. Жалдак М. І., Триус Ю. В. Основи теорії і методів оптимізації: навчальний посібник. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. - 608 с.

2. Жильцов О. Б. Математичне програмування (з елементами інформаційних технологій): Навч. посіб. для студ. вищ. нав. закл. / О. Б. Жильцов, В. Р. Кулян, О. О. Юнькова; за ред. О. О. Юнькової. – К.: МАУП, 2006. – 184 с.

3. Ермольев Ю. М. Об одной общей задаче стохастического программирования // Журнал «Кибернетика». – 1971. – № 3. – с. 47–50.

4. Костевич Л. С. Математическое программирование: Информ. Технологии оптимальных решений: Учеб. пособие / Л. С. Костевич. – Мн.: Новое знание, 2003. – 424с.

5. Юдин Д. Б. Выбор решений в сложных ситуациях // Журнал «Известия Академии наук СССР» сер. Техническая кибернетика. – 1970. – № 2. – с.9-24.

6. Юдин Д. Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. М.: «Сов. радио», 1974. – 400 с.

7. Charnes A., Cooper W. W., Symonds G. N. Cost horizons and certainty equivalents: an approach to stochastic programming of heating oil. // «Management Science». – 1958. – V.4, №3. – P. 235 –263.

### Некоторые методы решения задач стохастического программирования

***Беляй Ю.П., Ищук А.А.***

**Аннотация.** В статье рассмотрены некоторые методы решения задач оптимизации по методам стохастического программирования. Рассмотрены динамические вероятностные модели, в которых целевая функция и функции, по которым определяется множество допустимых решений, зависят от случайных параметров. Рассмотрены способы решения задачи с помощью различных программных средств. Проанализирована целесообразность использования того или иного программного средства в зависимости от выбранного исследования.

**Ключевые слова:** стохастическое программирование, математическая модель, оптимизация.

### Some methods of solving stochastic programming’s problems

***Biliai Y.P., Ishchuk A.A.***

**Abstract** The article considers some methods for solving the optimization problem stochastic programming. Considered dynamic probabilistic model in which the objective function and functions that define a set of acceptable solutions depend on parameters that are random. Article contains the

methods of solving problems using different software. Posted advice of using a particular software, depending on the problem's objectives.

**Keywords:** stochastic programming, mathematical model, optimization.

**УДК 510.3**

**Жалдак А. В.**
Житомирський державний університет імені Івана Франка

## Міри множин та їх визначення

**Анотація.** В статі розглядаються питання, що стосуються поняття міри множин, які вивчаються в курсах математики, фізики та інших дисциплін в середніх і вищих педагогічних навчальних закладах.

**Ключові слова**: міри множин, прості фігури, внутрішня міра, множини точок, зовнішня міра множини точок.

З проблемами вимірювання тих чи інших величин доводиться мати справу під час вивчення багатьох явищ навколишнього світу. Це оцінювання певних числових характеристик різноманітних об'єктів – довжин лінійних одновимірних фігур, площ плоских двохвимірних фігур, об'єктів просторових тривимірних тіл, маси тіл, кількості елементів у скінчених множинах, ймовірностей випадкових подій і т. д.

На практиці для визначення таких характеристик використовують певні еталонні одиниці вимірювання: для вимірювання довжин – кілометри, метри, сантиметри, міліметри, мікрони та їх ще дрібніші частини, для вимірювання площ – квадратні кілометри, квадратні метри, квадратні сантиметри і т. д., для вимірювання об'єм – кубічні метри, кубічні сантиметри і т. д., для вимірювання маси різноманітних тіл – тони, центнери, кілограми, грами, міліграми і т. д.

Разом з тим не завжди буває необхідним, а часом і неможливо визначати вказані характеристики вимірюваних об'єктів з високою точністю. Наприклад віддаль між певними населеними пунктами вимірюють з точністю до кілометрів, довжину і ширину кімнати – до метрів, довжину відрізка тканини до сантиметрів і т. д., вагу видобутого вугілля – до тон, вагу зібраного врожаю зернової культури з одного гектара – до центнерів, вагу ящика яблук – до кілограмів, вагу складових лікарських препаратів – до грамів чи навіть міліграмів і т. д. Однак не виключено, що за необхідності точного вимірювання вказаних характеристик вимірюваних об'єктів доведеться одиниці вимірювання подрібнювати все більше і більше до як завгодно малих, близьких до нульових, значень.

На практиці найчастіше вказані величини вимірюють з певною (можливо досить високою) точністю. В такому разі визначають найбільшу кількість еталонних одиниць, сумарна міра яких не перевищує шукану міру вимірюваного об'єкта, яку назвемо *внутрішньою мірою* вимірюваного об'єкта, а також найменшу кількість еталонних одиниць, сумарна міра яких перевищує шукану міру вимірюваного об'єкта, яку назвемо *зовнішньою мірою* вимірюваного об'єкта, і міру вимірюваного об'єкта покладають рівною значенню, яке знаходиться між значеннями внутрішньої та зовнішньої міри вимірюваного об'єкта (найчастіше беруть середнє арифметичне внутрішньої і зовнішньої міри). Зрозуміло, що чим дрібніші еталонні одиниці, тим меншою буде різниця між зовнішньою і внутрішньою мірами вимірюваного об'єкта. В зв'язку із сказаним нагадаємо, що в підручнику з геометрії для 7-9 класів означення площі плоскої фігури вводиться слідуючим чином. Перш за все зауважуються, що всяка фігура складається із точок, тобто всяка фігура розглядається як множина точок. Далі вводиться поняття *простої фігури* – це трикутники, прямокутники, або квадрати, міра яких може бути як завгодно малою, аж до нуля. Причому міра такої фігури визначається однозначно за відповідним означенням. (Наприклад площа прямокутника покладається рівною добутку його вимірів – ширини і висоти і. т. д.) [1]. Будь яка фігура, складена із вказаних простих фігур, також називається простою. Міра простої фігури дорівнює сумі мір її складових.

Якщо фігура $G$ не є простою, і знайдуться такі прості фігури $G_*$ – така, що $G_* \subset G$, і $G^*$ – така, що $G \subset G^*$, і різниця мір фігур $G^*$ і $G_*$ дорівнює нулеві, тоді міра фігури $G$ покладається рівною мірі фігури $G^*$ або мірі фігури $G_*$ [1], [2].

Надалі міру фігури $G$ позначатимемо символами $m(G)$, відповідно міри фігур $G^*$ і $G_*$ символами $m(G_*)$ та $m(G^*)$ [4], [6], [7]. Зауважимо, що міра $m$ є функцією, аргументами якої є множини точок або деяких елементів. Очевидно функція $m(G)$, аргументом якої є множина $G$, задовольняє такі вимоги (аксіоми):

$1_m$. $m(G) \geq 0$, тобто функція $m(G)$ невід'ємна;