2. Shpytcer M. Antymozh: Cyfrovыe texnolohyy y mozh. Moskva, 2014. 288 s.
3. Pidhorna T.V. Teoretyko-metodychni zasady pidhotovky majbutnix vchyteliv pryrodnycho-matematychnyx dyscyplin do profesijnoyi diyal"nosti v umovax informatyzovanoho navchal"noho procesu: dys. … d-ra ped. nauk: 13.00.02 / NPU imeni M.P. Drahomanova. Kyyiv, 2018.
4. Doslidzhennya internet-pronyknennya v Ukrayini I kvartal 2019 roku. URL: https://inau.ua/proekty/doslidzhennya-internet-audytoriyi (data zvernennya 26.03.2019).
5. Predstavnyky universytetu vzyaly uchast" v obhovorenni pytan" protydiyi kiberzalezhnosti nepovnolitnix. URL: http://univd.edu.ua/uk/news/3470 (data zvernennya 26.03.2019).

Pedagogical informatics as a component of preparation of future teachers to work in the conditions of informatized educational process

Tatyana Pidhorna

Abstract. The article summarizes and describes the necessity for future teachers of all subjects to study pedagogical informatics. Within the framework of the pedagogical informatics, future teachers are to learn the educational material related to the organization and implementation of digitalized education. Furthermore the future teachers are going to be responsible for the training of harmoniously developed future members of the society in an environment of a digitalized educational process, considering the advantages and problems that arise in such conditions.

Key words: pedagogical informatics, pedagogically weighed use of information and communication technologies, information safety for children.

УДК: 378.091

П.Ф. Самусенко
доктор фізико-математичних наук, професор
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

Деякі застосування елементів теорії скінченних границь до розв'язування задач з математичного аналізу

Анотація. У роботі проаналізовано доцільність використання апарату теорії скінченних різниць для обчислення сум. Наведено приклади знаходження сум, що ґрунтуються на застосуванні властивостей різницевого та антирізницевого оператора. Вказано відмінності та спільні риси між властивостями розв'язків найпростіших різницевих та диференціальних рівнянь. З’ясовано переваги та недоліки знаходження загального члена послідовності чисел Фібоначчі за допомогою рекурентного співвідношення та як розв'язку відповідного різницевого рівняння.

Ключові слова: різницевий оператор, антирізницевий оператор, різницеве рівняння.

Дискретність – фундаментальна властивість матеріального світу. Саме тому найбільш природним і водночас незручним для подальшого застосування є табличний спосіб задання функцій. За такого способу опису функціональних залежностей, як правило, невідоме аналітичне задання функції, через яке характеризується математична модель деякого реального процесу чи явища. А це в свою чергу унеможливлює з’ясування властивостей таблично заданої функції, що призводить до прогнозування лише спираючись на чисельні методи дослідження.

Відповіді на вказані питання є сутністю класичного розділу математики – числення скінченних різниць, однієї з фундаментальних основ обчислювальної математики. Бурхливий розвиток обчислювальної математики разом зі створенням сучасної елементної бази призвів до створення у XX ст. потужних ЕОМ, без використання яких подальший науково-технічний прогрес був би неможливий.

Фундаментальним поняттям числення скінченних різниць є поняття різницевого оператора. Якщо в області визначення функції $f(x)$ разом з точкою x міститься і точка $x+1$, то

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

називають різницевим оператором. Серед найважливіших його властивостей слід виокремити властивість лінійності. Таку саму властивість має і оператор диференціювання, який можна вважати узагальненням різницевого оператора. Разом з тим саме різницевий оператор, визначений для функцій з дискретним аргументом, використовується для опису різноманітних математичних структур – знаходження сум та з'ясування їх властивостей, інтерполяції функцій, побудови розв'язків різницевих рівнянь та дослідження, насамперед, їх асимптотичних властивостей. Таким чином, поняття різницевого оператора є фундаментальним поняттям математичних основ інформатики, а різницеве числення – необхідною складовою професійної підготовки студентів інформатичних спеціальностей.

Вказуючи властивості різницевого оператора, доцільно порівнювати їх з відповідними властивостями похідної. Так, рівність

$$\Delta(u(x)v(x)) = u(x)\Delta v(x) + v(x+1)\Delta u(x)$$

є аналогом формули похідної від добутку двох диференційовних функцій; визначення різницевого оператора n-го степеня

$$\Delta^n f(x) = \Delta(\Delta^{n-1} f(x)), n \in N,$$

$\Delta^0 f(x) \equiv f(x)$, відповідає визначенню похідної n-го порядку, тощо.

Для обчислення сум разом з різницевим оператором використовують так званий антирізницевий оператор (для функцій неперервного аргумента йому відповідає оператор інтегрування).

Для функції $\varphi(x)$ антирізницевою функцією називають таку функцію $f(x)$, що

$$\Delta f(x) = \varphi(x).$$

Позначимо її через $\Delta^{-1}\varphi(x)$. Оператор переходу від функції $\varphi(x)$ до $f(x) = \Delta^{-1}\varphi(x)$ називають антирізницевим оператором. Зрозуміло, що антирізницева функція $f(x)$ є аналогом первісної функції в інтегральному численні. Як і первісна функції, антирізницева функція визначається неоднозначно. А саме, якщо $f(x)$ антирізницева функція для $\varphi(x)$, а $C(x)$ періодична функція з періодом 1, то функція $f(x) + C(x)$ також є антирізницевою функцією для $\varphi(x)$.

Має місце формула (аналог формули Ньютона-Лейбніца)

$$\sum_{k=m}^{n-1} \varphi(k) = f(n) - f(m), \tag{1}$$

де $\Delta f(x) = \varphi(x)$, яку доволі часто використовують для обчислення сум.

Приклад 1. Знайти суму

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 .$$

Зробимо природне припущення, що антирізницевою функцією для функції $\varphi(x) = x^2$ є $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ з поки що невизначеними коефіцієнтами. Оскільки $\Delta d = 0$, то не втрачаючи загальності, вважатимемо, що $d = 0$. Отже, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$.

Знайдемо

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) - ax^3 + bx^2 + cx = \varphi(x) \equiv x^2.$$

Зрівнюючи коефіцієнти за однакових степенів x, отримуємо систему

$$\begin{cases} 3a = 1, \\ 3a + 2b = 0, \\ a + b + c = 0, \end{cases}$$

звідки знаходимо $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{6}$. Таким чином, $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$ і

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

Зазначимо, що подібний підхід до знаходження сум може бути легко поширений на випадок сум вигляду $\sum_{k=1}^{n-1} k^s$, $s \in N$.

Особливу цікавість становлять суми з трансцендентними членами.

Приклад 2. Знайти суму

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(\alpha\left(x + k + \frac{1}{2}\right)\right).$$

Оскільки

$$\Delta \sin \alpha(x+k) = \sin \alpha(x+1+k) - \sin \alpha(x+k) = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\left(x + k + \frac{1}{2}\right),$$

то

$$\Delta\left(\frac{\sin\alpha(x+k)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right)=\cos\alpha\left(x+k+\frac{1}{2}\right).$$

Отже,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cos\left(\alpha\left(x+k+\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\alpha(x+n)-\sin\alpha x\right).$$

Поклавши в останній рівності $x=-\frac{1}{2}$, отримуємо відому формулу

$$1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos(n-1)\alpha=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{n-1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Класичним методом інтегрування функцій є метод інтегрування частинами. Його аналогом для функцій з дискретним аргументом є перетворення Абеля.

Нехай $U(k)=\sum_{i=1}^{k}u(i)$. Тоді

$$\sum_{k=m}^{n-1}u(k+1)v(k+1)=U(n)v(n)-U(m)v(m)-\sum_{k=m}^{n-1}U(k)\Delta v(k). \tag{2}$$

Перетворення, що грунтується на використанні формули (2), називається перетворенням Абеля.

Приклад 3. Знайти суму

$$\sum_{k=1}^{n-1}k2^k .$$

У розглядуваному випадку

$$u(k)=2^{k-1},\ v(k)=k-1,\ U(k)=\sum_{i=1}^{k}2^{i-1}=2^k-1.$$

Тоді згідно з формулою (2)

$$\sum_{k=1}^{n-1}k2^k=(2^n-1)(n-1)-\sum_{k=1}^{n-1}(2^k-1)=2^n(n-2)+2.$$

Узагальнюючи ідеї прикладів 1 та 3, можна ефективно знаходити суми більш загального вигляду. Опишемо, наприклад, алгоритм знаходження суми $\sum_{k=1}^{n-1}k^2a^k$. Як і раніше, нехай

$$u(k)=a^{k-1},\ v(k)=(k-1)^2,\ U(k)=\sum_{i=1}^{k}a^{i-1}=\frac{a^k-1}{a-1}.$$

Тоді

$$\sum_{k=1}^{n-1}k^2a^k=\frac{a^n-1}{a-1}(n-1)^2-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a^k-1}{a-1}(2k-1).$$

Тобто знаходження суми $\sum_{k=1}^{n-1}k^2a^k$ зводиться до вже розглянутого випадку.

Спираючись на поняття різницевого оператора, можна дати визначення різницевого рівняння. Співвідношення

$$F(x,f(x),\Delta f(x),\ldots,\Delta^n f(x))=0, \tag{3}$$

де функція F задана, функція f – шукана, називають різницевим рівнянням n-го порядку, якщо в це співвідношення після заміни приростів їх виразами через f явно входить як $f(x+n)$, так і $f(x)$. Якщо до рівняння (3) після спрощень не входить $f(x+n)$, то природно вважати, що його порядок менший за n. Якщо ж до нього не входить $f(x)$, але входить, наприклад, $f(x+1)$, то за допомогою заміни незалежної змінної вдається знизити порядок рівняння. Цим різницеве рівняння суттєво відрізняється від диференціального, де заміна незалежної змінної на порядок рівняння не впливає. Наприклад, розглянемо різницеве рівняння

$$2f(x)+3\Delta f(x)-\Delta^3 f(x)=x\,. \qquad (4)$$

Оскільки

$$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x),$$

$$\Delta^3 f(x)=f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)\,,$$

то (4) набуде вигляду

$$3f(x+2)-f(x+3)=x\,.$$

Покладемо $z=x+2$. Тоді отримаємо рівняння

$$3f(z)-f(z+1)=z-2$$

першого порядку. Таким чином і рівняння (4) вважатимемо рівнянням першого порядку.

Разом з тим основні поняття теорії різницевих рівнянь та властивості їх розв'язків близькі до відповідних аналогів теорії диференціальних рівнянь. Так, наприклад, розв'язком рівняння (3) називають функцію $f(x)$, в разі підстановки якої до співвідношення (3) воно перетворюється на тотожність. Взагалі кажучи, загальний розв'язок різницевого рівняння n-го порядку залежить від n довільних періодичних функцій з періодом 1.

Лінійна комбінація розв'язків лінійного різницевого рівняння

$$f(x+n)+p_1(x)f(x+n-1)+\ldots+p_n(x)f(x)=0 \qquad (5)$$

також є його розв'язком.

Якщо $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ - розв'язки рівняння (5) і визначник

$$D=\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ . & . & . & . \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}\neq 0\,,$$

де $f_{ij}=f_i(j-1)$, $i,j=\overline{1,n}$, то загальний розв'язок рівняння (5) набуває вигляду

$$f(x)=C_1 f_1(x)+C_2 f_2(x)+\ldots+C_n f_n(x)\,,$$

C_1, C_2, …, C_n – довільні сталі.

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння є сумою його частинного розв'язку і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння.

Природно, що найбільш дослідженими і водночас важливими є лінійні різницеві рівняння зі сталими коефіцієнтами, серед яких, як і в теорії диференціальних рівнянь, виокремлюють рівняння другого порядку

$$f(x+2)+pf(x+1)+qf(x)=g(x)\,, \qquad (6)$$

p, $q\in R$. Шукаючи розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$f(x+2)+pf(x+1)+qf(x)=0\,, \qquad (7)$$

залежно від структури коренів характеристичного рівняння

$$\lambda^2+p\lambda+q=0 \qquad (8)$$

розрізняють три випадки.

1. Корені λ_1, λ_2 рівняння (8) дійсні, різні. Тоді функції

$$f_1(x)=\lambda_1^x,\ f_2(x)=\lambda_2^x$$

є розв'язками рівняння (7).

2. Корені λ_1, λ_2 рівняння (8) однакові. Тоді

$$f_1(x)=\lambda_1^x,\ f_2(x)=x\lambda_1^x\,.$$

3. Корені λ_1, λ_2 рівняння (8) комплексні, різні. Нехай $\lambda_1=\alpha+i\beta$. Тоді $\lambda_2=\alpha-i\beta$. В такому разі

$$f_1(x)=\rho^x\cos\varphi x,\ f_2(x)=\rho^x\sin\varphi x\,,$$

де $\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $\varphi=Arg(\alpha+i\beta)$.

Для знаходження частинного розв'язку рівняння (6), як і в теорії диференціальних рівнянь, можна скористатись універсальним методом варіації довільних сталих, або в найпростіших випадках, що часто зустрічаються на практиці, дібрати тип розв'язку, аналізуючи праву частину рівняння (6).

Нехай $g(x)=r(x)e^{\alpha x}$, де $r(x)$ – многочлен n-го степеня. Припустимо, що α є s-кратним коренем характеристичного рівняння (8). Тоді частинний розв'язок рівняння (6) шукається у вигляді

$$f^*(x) = x^s e^{\alpha x}(a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n).$$

Підставляючи $f^*(x)$ у рівняння (6), сталі a_i, $i = \overline{0;n}$, знаходять за методом невизначених коефіцієнтів.

Приклад 4. Знайти загальний член послідовності чисел Фібоначчі.

Числа Фібоначчі знаходяться із співвідношення

$$f_{n+2} = f_n + f_{n+1},\ n \in N, \tag{9}$$

де $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, яке можна вважати різницевим рівнянням. Відповідне характеристичне рівняння набуває вигляду

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Його корені

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (8) набуває вигляду

$$f_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

З початкових умов $f_0 = 1$, $f_1 = 1$ визначаємо C_1, C_2. Тут

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}},\ C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Тому

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]. \tag{10}$$

Зрозуміло, що з формули (10), на відміну від (9), визначити f_n складно, оскільки в такому разі потрібно виконувати операцію піднесення до степеня ірраціонального числа з подальшим зведенням подібних доданків. Разом з тим результат має бути натуральним. Однак, якщо в задачі потрібно дослідити асимптотичну поведінку f_n за великих значень n, то задання f_n за допомогою (10) надзвичайно зручне.

Таким чином, навчання студентів інформатичних спеціальностей елементів теорії скінченних границь сприятиме не лише покращенню їх фундаментальної підготовки, а матиме насамперед важливе прикладне значення і відповідні знання можуть використовуватись під час вивчення різноманітних дисциплін професійного циклу.

Список використаних джерел:

1. Ядренко М.Й. Дискретна математика: навчальний посібник. Київ, 2004. 245 с.
2. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. Москва, 1959. 400 с.
3. Грехем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. Москва, 1988. 703 с.

References:

1. Yadrenko M.I. Dyskretna matematyka: navchalnyi posibnyk. Kyiv, 2004. 245 s.
2. Gel'fond A.O. Ischislenie konechnyh raznostej. Moskva, 1959. 400 s.
3. Grehem R., Knut D., Patashnik O. Konkretnaja matematika. Osnovanie informatiki. Moskva, 1988. 703 s.

Some application of elements of the theory of finite boundaries to solving problems in mathematical analysis

Samusenko P.F.

Abstract. In this article the expediency of using the apparatus of finite difference theory to calculate sums. Examples of finding sums based on the application of the properties of a difference and a discriminant operator are given. The differences and common features between the properties of solutions of the simplest difference and differential equations are indicated. The advantages and disadvantages of finding a common member of the sequence of Fibonacci numbers with the help of a recurrence relation and how to solve a corresponding difference equation are found out.

Key words: difference operator, anti-difference operator, difference equation.