Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 14.— С. 158–164.

О некоторых свойствах матричных представлений конечных моноидов, порожденных идемпотентами

Е. Н. Тертичная

Киевский национальный экономический университет имени Вадима Гетьмана

Аннотация. Пусть I — конечное множество (без 0 и 1) и J — подмножество в $I \times I$ без диагональных элементов. Через $S_1(I, J)$ обозначен моноид, порожденный элементами $e_0 = 0$, $e_1 = 1$ и e_i, $i \in I$, и следующими соотношениями: $e_i^2 = e_i$ для всех $i \in I$, $e_i e_j = 0$ для всех $(i, j) \in J$. В этой работе доказывается, что для любого конечного моноида $S = S_1(I, J)$ и любого его матричного представления M над полем k характеристики 0 матрица $\sum_{i \in I \cup \{0,1\}} M(e_i)$ — почти невырожденная.

On some properties of matrix representations of finite monoids generated by idempotents

O. M. Tertychna

Vadym Hetman Kyiv National Economic University

Abstract. Let I be a finite set (without $0, 1$) and J a subset of $I \times I$ without diagonal elements. Let $S_1(I, J)$ denotes the monoid generated by $e_0 = 0$, $e_1 = 1$ and e_i, $i \in I$, with the following relations: $e_i^2 = e_i$ for any $i \in I$, $e_i e_j = 0$ for any $(i, j) \in J$. In this paper we prove that, for any finite monoid $S = S_1(I, J)$ and any its matrix representation M over a field k of characteristic 0, the matrix $\sum_{i \in I \cup \{0,1\}} M(e_i)$ is almost non-singular.

Введение

Пусть I — конечное множество, не содержащее элементов 0 и 1, а J — подмножество в $I \times I$ без диагональных элементов (i, i), $i \in I$. Обозначим через $S_1(I, J)$ моноид с образующими элементами e_i, где $i \in I \cup \{0, 1\}$, и следующими определяющими соотношениями:

1) $e_0 = 0$ ($e_0 e_i = e_i e_0 = 0$ для $i \in I \cup \{0, 1\}$);
2) $e_1 = 1$ ($e_1 e_i = e_i e_1 = e_i$ для $i \in I \cup \{1\}$);
3) $e_i^2 = e_i$ для всех $i \in I$;
4) $e_i e_j = 0$ для любой пары $(i, j) \in J$.

E-mail: olena-tertychna@mail.ru

Определенный таким образом моноид будем называть *моноидом, порожденным идемпотентами с частичным нулевым умножением*. Множество всех таких моноидов обозначим через $\mathcal{I}_1$.

1. Формулировка основного результата

В этой работе мы рассматриваем конечномерные матричные представления моноидов $S \in \mathcal{I}_1$ над произвольным полем k характеристики 0.

Матричное представление размерности n моноида $S = S_1(I, J) \in \mathcal{I}$ над полем k — это (согласно общего определения матричного представления полугруппы) набор матриц размера $n \times n$ $M = \{M(e_i) \mid i \in I \cup \{0, 1\}\}$ с элементами из k такой, что

1) $M(e_0)M(e_j) = M(e_j)M(e_0) = M(e_0)$ для всех $i \in I \cup \{0, 1\}$;

2) $M(e_1)M(e_j) = M(e_j)M(e_1) = M(e_j)$ для всех $i \in I \cup \{1\}$;

3) $[M(e_i)]^2 = M(e_i)$ для всех $i \in I$;

4) $M(e_i)M(e_j) = M(e_0)$ для любой пары $(i, j) \in J$.

Отметим, что в определении матричных представлений мы не требуем, чтобы матрица $M(e_0)$ (соответственно $M(e_1)$) была нулевой (соответственно единичной), хотя во многих случаях это удобно делать.

Эквивалентность матричных представлений $M = \{M(e_i) \mid i \in I \cup \{0, 1\}\}$ і $N = \{N(e_i) \mid i \in I \cup \{0, 1\}\}$ моноида $S_1(I, J)$ означает существование обратимой матрицы C такой, что $M(e_i) = C^{-1}N(e_i)C$ для всех $i \in I \cup \{0, 1\}$.

Каждому моноиду $S = S_1(I, J) \in \mathcal{I}_1$ (или, что то же самое, паре (I, J)) поставим в соответствие следующий ориентированный граф $\Lambda = (\Lambda_0, \Lambda_1)$ с множеством вершин Λ_0 і множеством стрелок Λ_1: $\Lambda_0 = \mathcal{E}(I) = \{e_i \,|\, i \in I\}$, а Λ_1 состоит из стрелок $e_i \to e_j$, где (i, j) пробегает множество J. Обозначим этот граф через $\Lambda = \Lambda(I, J) = \Lambda(S)$.

Однако более важную роль в дальнейшем будет играть ориентированный граф $\overline{\Lambda} = \overline{\Lambda}(I, J) = \overline{\Lambda}(S)$ с множеством вершин $\overline{\Lambda}_0$ и множеством стрелок $\overline{\Lambda}_1$, который определяется следующим образом: $\overline{\Lambda}_0 = \Lambda_0$, а $e_i \to e_j$ принадлежит $\overline{\Lambda}_1$ тогда и только тогда, когда $e_i \to e_j$ не принадлежит Λ_1 и при этом $i \neq j$. Другими словами, ориентированный граф $\overline{\Lambda}$ является дополнением графа Λ до полного ориентированного графа без петель (то есть такого ориентированного графа, который не имеет стрелок вида $a \to a$ и содержит в точности одну стрелку $a \to b$ для любых вершин a і $b \neq a$).

Очевидно, что моноид $S \in \mathcal{I}_1$ однозначно восстанавливается по каждому из введенных ориентированных графов.

Из основных результатов работы [**1**] следует, что моноид $S = S_1(I, J)$ конечен тогда и только тогда, когда граф $\overline{\Lambda}(S)$ — ацикличный (то есть не содержит ориентированных циклов).

Квадратную матрицу A над полем k будем называть *почти невырожденной* (или 0-*полупростой*) если выполняется одно из следующих эквивалентных условий (см. работу [**3**]):

a) $\mathrm{rank}(A^2) = \mathrm{rank}(A)$;

b) матрица A подобна прямой сумме обратимой и нулевой матриц;

c) минимальный полином $m_A(x)$ матрицы A не делится на x^2;

d) существует полином $f(x) = xg(x)$ такой, что $g(0) \neq 0$ и $f(A) = 0$.

В этой работе мы докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Если $S = S_1(I, J)$ — конечный моноид из $\mathcal{I}_1$ и $M = \{M(e_i) \mid i \in I \cup \{0, 1\}\}$ — его произвольное матричное представление над полем k характеристики 0, то матрица $Q = \sum_{i \in I \cup \{0,1\}} M(e_i)$ — почти невырожденная.*

Эту теорему можно доказать, используя результаты работы [**2**] и некоторые свойства матричных представлений полугрупп. Мы докажем эту теорему непосредственно.

2. Доказательство теоремы

Легко доказать (см., например, [**4**]), что в случае, когда полугруппа содержит единичный элемент e, то любое матричное представление M эквивалентно прямой сумме матричных представлений M_1 и M_2 таких, что $M_1(e)$ — единичная матрица, а $M_2(x)$ — нулевая матрица для любого элемента полугруппы.

Аналогично, когда полугруппа содержит нулевой элемент 0, то любое матричное представление N эквивалентно прямой сумме матричных представлений N_1 и N_2 таких, что $N_1(0)$ — нулевая матрица, а $N_2(x)$ — единичная матрица для любого элемента полугруппы.

Отсюда следует, что теорему достаточно доказать для таких матричных представлений M моноида $S = S_1(I, J)$, что $M(e_0)$ — нулевая матрица и $M(e_1)$ — единичная матрица. В этом случае матричное представление $M = \{M(e_i) \mid i \in I \cup \{0, 1\}\}$ моноида S будем отождествлять с набором матриц $M(e_i)$ для $i \neq 0, 1$. При выполнении этого условия имеет место следующее утверждение, из которого и следует доказываемая теорема.

Теорема 2. *Если $S = S_1(I, J)$ — конечный моноид из $\mathcal{I}_1$ и $M = \{M(e_i) \mid i \in I \cup \{0, 1\}\}$ — его произвольное матричное представление над полем k характеристики 0, то $T = \sum_{i \in I} M(e_i)$ — почти невырожденная матрица, не имеющая собственных чисел равных -1.*

Доказательство теоремы 2 будем проводить методом индукции по n, где $n = |I|$.

Базис индукции. Если $n = 1$, то существует только один моноид $S = S_1(I, J)$ из $\mathcal{I}_1$, и он имеет вид $S = \langle 0, 1, e_2 \mid e_2^2 = e_2 \rangle$. Его ориентированный граф $\overline{\Lambda}(S)$ состоит из одной вершины e_2 и не имеет стрелок. Произвольное матричное представление M моноида S задается одной матрицей $M = \{M(e_2)\}$, при этом выполняется соотношение $[M(e_2)]^2 = M(e_2)$. Утверждение теоремы следует в этом случае непосредственно из вида канонической формы Жордана матрицы $M(e_2)$:

$$A_0 = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \tag{1}$$

где E — единичная матрица.

Предположение индукции. Пусть n — произвольное натуральное число. Предположим, что для любого конечного моноида $S = S_1(I, J)$ из $\mathcal{I}_1$, порожденного идемпотентами $e_0, e_1, \ldots, e_n$ (то есть $|I| = n - 1$) с ацикличным графом $\overline{\Lambda}(S)$ (из $n-1$ вершины), выполняется утверждение теоремы.

Шаг индукции. Докажем, что теорема верна и для $|I| = n$. Пусть $S = S_1(I, J) \in \mathcal{I}_1$ — конечный моноид, порожденный идемпотентами $e_0, e_1, \ldots, e_{n+1}$, с ацикличным ориентированным графом $\overline{\Lambda}(S)$. Покажем, что для любого фиксированного представления $M = \{M(e_i) \mid i = 2, \ldots, n+1\}$ моноида S над полем k матрица $T = \sum\limits_{i=2}^{n+1} M(e_i)$ является почти невырожденной, собственные числа которой не равны -1.

Согласно определению матричного представления моноида $S_1(I, J)$ из $\mathcal{I}_1$ имеют место следующие соотношения: $[M(e_i)]^2 = M(e_i)$ для всех $i = 2, \ldots, n+1$ и $M(e_i)M(e_j) = 0$ для всех пар $(i, j) \in J$. Положим $A_2 = M(e_2), \ldots, A_{n+1} = M(e_{n+1})$, тогда $T = \sum\limits_{i=2}^{n+1} A_i$.

Найдем в графе $\overline{\Lambda}(S)$ такую вершину, из которой не выходит ни одна стрелка (в силу ацикличности графа $\overline{\Lambda}(S)$ хотя бы одна такая вершина всегда существует). Пусть вершина e_l $(2 \le l \le n+1)$ удовлетворяет данное условие.

Далее рассмотрим подмоноид S' моноида S, порожденный образующими $e'_0, e'_1, \ldots, e'_n$, где $e'_0 = e_0,\ e'_1 = e_1, \ldots,\ e'_{l-1} = e_{l-1},\ e'_l = e_{l+1}, \ldots,\ e'_n = e_{n+1}$. Очевидно, что граф $\overline{\Lambda}(S')$ совпадает с графом $\overline{\Lambda}(S) \setminus \{e_l\}$, а набор матриц $N = \{N(e'_2), \ldots, N(e'_n)\}$, где $N(e'_2) = A_2, \ldots,\ N(e'_{l-1}) = A_{l-1},\ N(e'_l) = A_{l+1}, \ldots,\ N(e'_n) = A_{n+1}$, задает матричное представление моноида S'.

По предположению индукции для матричного представления N моноида S' матрица $T' = \sum\limits_{i=2}^{n} N(e'_i) = A_2 + \ldots + A_{l-1} + A_{l+1} + \ldots + A_{n+1} = T - A_l$ — почти невырожденная матрица без собственных чисел равных -1. Тогда из определения почти невырожденной матрицы (b) следует, что существует обратимая матрица

$$X = \left(\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline X_3 & X_4 \end{array}\right)$$

такая, что выполняется матричное равенство

$$T' = \left(\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline X_3 & X_4 \end{array}\right)^{-1} \left(\begin{array}{c|c} T_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline X_3 & X_4 \end{array}\right), \tag{2}$$

где T_0 — обратимая матрица без собственных чисел равных -1. При этом матрица A_l примет следующий вид:

$$A_l = \left(\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline X_3 & X_4 \end{array}\right)^{-1} \left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline X_3 & X_4 \end{array}\right). \tag{3}$$

Поскольку в графе $\overline{\Lambda}(S)$ из вершины e_l не выходит ни одной стрелки (в силу выбора этой вершины), то $A_lA_j = 0$ для всех $j \in I \setminus \{l\}$. В частности, выполняется соотношение $A_l \left(\sum_{j\in I\setminus\{l\}} A_j\right) = 0$ (или, что то же самое, $A_lT' = 0$). Из этого, учитывая равенства (2) и (3), следует:

$$\left(\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline X_3 & X_4 \end{array}\right)^{-1} \left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} T_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline X_3 & X_4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Умножив это равенство слева на X и справа на X^{-1}, получим (после умножения матриц) равенство

$$\left(\begin{array}{c|c} B_1T_0 & 0 \\ \hline B_3T_0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

из которого (поскольку матрица T_0 обратима) следует, что $B_1 = B_3 = 0$. Таким образом, матрица A_l из (3) будет иметь вид:

$$A_l = \left(\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline X_3 & X_4 \end{array}\right)^{-1} \left(\begin{array}{c|c} 0 & B_2 \\ \hline 0 & B_4 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline X_3 & X_4 \end{array}\right). \tag{4}$$

Легко убедиться, что из равенства $A_l^2 = A_l$ следует $B_4^2 = B_4$; а (как уже было сказано выше) идемпотентная матрица подобна матрице A_0 (см. (1)). То есть существует обратимая матрица

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}$$

такая, что выполняется матричное равенство

$$B_4 = Y^{-1}A_0Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Рассмотрим далее такую матрицу:

$$Z = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & Y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} E & 0 & 0 \\ \hline 0 & Y_1 & Y_2 \\ 0 & Y_3 & Y_4 \end{array}\right).$$

Она обратимая, поскольку обратимой является матрица Y. Тогда, учитывая равенство (5), получим (как равенство блочных матриц) следующее:

$$Z \left(\begin{array}{c|c} 0 & B_2 \\ \hline 0 & B_4 \end{array}\right) Z^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & Y \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & B_2 \\ \hline 0 & B_4 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & Y^{-1} \end{array}\right) =$$
$$= \left(\begin{array}{c|c} 0 & B_2 Y^{-1} \\ \hline 0 & Y B_4 Y^{-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B_2 Y^{-1} \\ \hline 0 & A_0 \end{array}\right),$$

откуда (учитывая вид матриц A_0 и Z и заменив $B_2 Y^{-1}$ на C) следует

$$\begin{gathered} \left(\begin{array}{c|c} 0 & B_2 \\ \hline 0 & B_4 \end{array}\right) = Z^{-1} \left(\begin{array}{c|c} 0 & C \\ \hline 0 & A_0 \end{array}\right) Z = \\ = \left(\begin{array}{c|cc} E & 0 & 0 \\ \hline 0 & Y_1 & Y_2 \\ 0 & Y_3 & Y_4 \end{array}\right)^{-1} \left(\begin{array}{c|cc} 0 & C_1 & C_2 \\ \hline 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} E & 0 & 0 \\ \hline 0 & Y_1 & Y_2 \\ 0 & Y_3 & Y_4 \end{array}\right). \end{gathered} \tag{6}$$

При этом

$$Z \left(\begin{array}{c|c} T_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) Z^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & Y \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} T_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & Y^{-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} T_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

откуда следует, что

$$\left(\begin{array}{c|c} T_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} E & 0 & 0 \\ \hline 0 & Y_1 & Y_2 \\ 0 & Y_3 & Y_4 \end{array}\right)^{-1} \left(\begin{array}{c|cc} T_0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} E & 0 & 0 \\ \hline 0 & Y_1 & Y_2 \\ 0 & Y_3 & Y_4 \end{array}\right). \tag{7}$$

Подставив равенство (6) в (4), получим следующий вид для матрицы A_l:

$$A_l = X^{-1} Z^{-1} \left(\begin{array}{c|cc} 0 & C_1 & C_2 \\ \hline 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) ZX = (ZX)^{-1} \left(\begin{array}{c|cc} 0 & C_1 & C_2 \\ \hline 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) ZX; \tag{8}$$

а после подстановки равенства (7) в (2), матрица T' примет такой вид:

$$T' = X^{-1} Z^{-1} \left(\begin{array}{c|cc} T_0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) ZX = (ZX)^{-1} \left(\begin{array}{c|cc} T_0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) ZX, \tag{9}$$

где матрица X уже будет иметь следующий вид:

$$X = \left(\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline X_3 & X_4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} X_1 & X_2^{11} & X_2^{12} \\ \hline X_3^{11} & X_4^{11} & X_4^{12} \\ X_3^{21} & X_4^{21} & X_4^{22} \end{array}\right).$$

Из соотношения $A_l^2 = A_l$ имеем $C_2 = 0$. Таким образом, согласно (8) и (9), (если предварительно положить $V = ZX$) матрицы A_l и T' окончательно будут иметь вид

$$A_l = V^{-1} \left(\begin{array}{c|cc} 0 & C_1 & 0 \\ \hline 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) V, \quad T' = V^{-1} \left(\begin{array}{c|cc} T_0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) V, \tag{10}$$

где матрица V обратимая, поскольку такими есть X и Z.

Так как матрица T' равна $T - A_l$ (см. выше), то из (10) следует, что

$$T = T' + A_l = V^{-1} \left(\begin{array}{c|cc} T_0 & C_1 & 0 \\ \hline 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) V.$$

Итак, матрица $T = \sum\limits_{i=2}^{n+1} M(e_i)$ подобна прямой суме обратимой матрицы

$$\left(\begin{array}{c|c} T_0 & C_1 \\ \hline 0 & E \end{array}\right)$$

и нулевой матрицы, а значит T — почти невырожденная матрица (не имеющая собственных чисел равных -1, так как их не имеет T_0), что и доказывает индукционный шаг.

Таким образом, согласно методу математической индукции теорема 2 доказана.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору В. М. Бондаренко за внимание к работе и ценные советы.

Список литературы

[1] *Бондаренко В. М., Тертичная Е. Н.* О бесконечности типа бесконечных полугрупп, порожденных идемпотентами с частичным нулевым умножением // Проблеми топології та суміжні питання : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2006. — Т. 3, № 3. — С. 23–44.

[2] *Bondarenko V. M., Tertychna O. M.* On tame semigroups generated by idempotents with partial null multiplication // Algebra Discrete Math. — 2008. — № 4. — P. 15–22.

[3] *Bondarenko V. M., Tertychna O. M.* On 0-simplicity of linear hulls of generators for semigroups generated by idempotents // Algebra Discrete Math. — 2012. — Vol. 14, № 2. — P. 168–173.

[4] *Бондаренко В. М., Костишин Е. М.* Модулярні зображення напівгрупи $\boldsymbol{T_2}$ // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Серія: математика і інформатика. — 2011. — Вип. 22. — С. 26–34.