Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 14.— С. 189–216.

УДК 511.72+519.21+517.5

Геометрія дійсних чисел у їх кодуваннях засобами нескінченного алфавіту як основа топологічних, метричних, фрактальних і ймовірнісних теорій

М. В. Працьовитий

НПУ імені М. П. Драгоманова

Анотація. Вводиться нескінченно-символьне кодування (2^∞-зображення) дійсних чисел $x \in (0;1]$ з алфавітом $\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ і основою 2:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_k}} \equiv \Delta^{2^\infty}_{a_1a_2\ldots a_k\ldots}, \quad \text{де } (a_k) \text{ — послідовність натуральних чисел,}$$

яке має нульову надлишковість (кожне число має єдине зображення). Вказується його зв'язок з класичним двійковим зображенням, доводиться критерій раціональності числа, описується його геометрія, закладаються основи метричної, фрактальної та ймовірнісної теорій. Дане зображення використовується для моделювання та дослідження різних математичних об'єктів зі складною локальною структурою і фрактальними властивостями.

Geometry of real numbers with infinite-symbol encoding as foundations of topological, metric, fractal and probabilistic theories

M. Pratsiovytyi

National Pedagogical Dragomanov University

Abstract. The infinite-symbol encoding (2^∞-expansion) for real numbers $x \in (0;1]$ with alphabet $\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ and base 2 is introduced:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_k}} \equiv \Delta^{2^\infty}_{a_1a_2\ldots a_k\ldots}, \quad \text{where } (a_k) \text{ is a sequence of positive integers.}$$

It has a zero redundancy (any number has a unique expansion). The relation to classic binary expansion is proposed, the criterion of rationality of number is proved, its geometry is described, the foundations of metric, fractal and probabilistic theories are laid. We use this expansion to modeling and study of various mathematical objects with complicated local structure and fractal properties.

E-mail: prats4@yandex.ru

Вступ

Побудувати цілісну теорію дійсних чисел можна на різних основах, з суттєвим використанням та без використання теорії раціональних чисел. Побудувати множину додатних дійсних чисел можна стартуючи з множини натуральних або цілих невід'ємних чисел. Класичними у цьому відношення є моделі дійсного числа як елементарного ланцюгового дробу [**31**] або збіжного ряду (знакододатного або знакозмінного), членами якого є числа, обернені до натуральних. Такими є ряди Енгеля [**16, 26**], Сильвестера [**27, 28**], Люрота [**9, 12, 18**], Серпінського-Пірса [**1, 2, 7, 11, 13**], Остроградського [**24, 25**] тощо.

Топологічна, метрична, фрактальна та ймовірнісна теорії дійсних чисел, у тій чи іншій системі зображення, займаються вивченням, відповідно, топологічних, метричних, фрактальних та ймовірнісних властивостей множин дійсних чисел, визначених умовами на їх зображення. Основою для них є геометрія зображення.

У традиційному розумінні геометрія чисел (геометрична теорія чисел) — це галузь теорії чисел, яка вивчає теоретико-числові проблеми з застосуванням геометричних засобів (понять, прийомів та методів). Вона стала самостійною (автономною) областю математики на початку XX століття в першу чергу завдяки роботам Г. Мінковського [**6**] і Г. Вороного.

У математиці та її застосуваннях сьогодні використовуються різні представлення та зображення (кодування) дійсних чисел, які використовують скінченний та нескінченний, сталий та змінний алфавіти, тобто дійсне число має різні форми існування. Однією з найпростіших є представлення та зображення чисел у s-ковій системі (двійковій, трійковій, десятковій та ін.). Кодування чисел засобами нескінченного алфавіту має свої принципові відмінності. Один з класичних способів, як уже зазначалося, дає представлення чисел елементарними ланцюговими дробами.

Кодуванням дійсних чисел відрізка $[0;1]$ засобами алфавіту A називається відповідність між множинами $[0;1]$ і $L = A \times A \times A \times \ldots$, при якій кожному числу $x \in [0;1]$ відповідає принаймні один елемент множини L і при цьому кожний елемент множини L є образом принаймні єдиного числа відрізка $[0;1]$. Сама послідовність $(\alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots) \in L$, яка відповідає числу x, називається його *зображенням (або кодом)*, а α_n — *n-ою цифрою (або символом)* цього зображення.

Кажуть [**29**], що система кодування має нульову надлишковість, якщо кожне число має не більше двох зображень, причому переважна більшість чисел має єдине зображення.

Під *геометрією зображення дійсного числа* ми розуміємо геометричний зміст цифр, який індукує тополого-метричні та фрактальні властивості множин чисел, визначених умовами на використання цифр (наприклад, заборонами), а також метричні співвідношення, ним породжене. Це відносно нова галузь досліджень, яка продиктована в першу чергу потребами, задачами та проблемами теорії фракталів (фрактальної геометрії та фрактального аналізу, метричні відношення), усвідомленою необхідністю дослідження математичних об'єктів зі складною локальною структурою і багатими множинами особливостей.

У даній роботі ми розглядаємо одну з найпростіших за своїми геометричними властивостями (геометрією) систем кодування дійсних чисел з нескінченно-символьним алфавітом і основою 2, вивчаємо її геометрію (властивості циліндричних і хвостових множин) і найпростіші застосування у метричній теорії чисел, фрактальному аналізі та теорії ймовірностей. З її допомогою ми моделюємо і досліджуємо фрактальні множини, функції з фрактальними властивостями та випадкові величини з фрактальними спектрами.

1. 2^∞-зображення дійсного числа

Теорема 1. *Для будь-якого $x \in (0;1]$ існує єдина послідовність натуральних чисел (a_n) така, що*

$$x = \frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_n}} + \ldots \equiv \Delta^{2^\infty}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}. \tag{1}$$

Доведення. Очевидною є рівність

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots,$$

тобто для числа 1 послідовністю (a_n) є послідовність $a_n = 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Оскільки

$$x \in (0;1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}; \frac{1}{2^{n-1}}\right],$$

то очевидно, що існує $a_1 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$x \in \left(\frac{1}{2^{a_1}}; \frac{1}{2^{a_1-1}}\right], \quad \text{тобто} \quad \frac{1}{2^{a_1}} < x \le \frac{1}{2^{a_1-1}}$$

або

$$0 < x - \frac{1}{2^{a_1}} \equiv x_1 \le \frac{1}{2^{a_1}}.$$

Звідки отримуємо

$$x = \frac{1}{2^{a_1}} + x_1.$$

Аналогічно, оскільки

$$x_1 \in \left(0; \frac{1}{2^{a_1}}\right] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{a_1+n}}; \frac{1}{2^{a_1+n-1}}\right],$$

то існує a_2 таке, що

$$x_1 \in \left(\frac{1}{2^{a_1+a_2}}; \frac{1}{2^{a_1+a_2-1}}\right] \Longleftrightarrow 0 < x_1 - \frac{1}{2^{a_1+a_2}} \equiv x_2 \leq \frac{1}{2^{a_1+a_2}}.$$

Звідки

$$x_1 = \frac{1}{2^{a_1+a_2}} + x_2,$$

а отже,

$$x = \frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2}} + x_2.$$

Продовжуючи цей процес, буде знайдено числа $a_3, a_4, \ldots, a_k$ і $x_3, x_4, \ldots, x_{k-1},\ x_k$ такі, що

$$0 < x_{k-1} - \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_k}} \equiv x_k \leq \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_k}}$$

і

$$x = \frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_k}} + x_k.$$

Після чого, міркуючи аналогічно, а саме: оскільки

$$x_k \in \left(0; \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_k}}\right] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_k+n}}; \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_k+n-1}}\right],$$

то існує $a_{k+1} \in \mathbb{N}$ таке, що

$$0 < x_k - \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_{k+1}}} \equiv x_{k+1} \leq \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}}}.$$

Тому цей процес є нескінченним, але є збіжним, оскільки

$$x_{k+1} \leq \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_{k+1}}} \leq \frac{1}{2^{k+1}} \to 0\ (k \to \infty).$$

Отже, має місце розклад (1).

Його єдиність власне є наслідком єдиності кожного a_n. Дамо незалежне доведення цьому. Для цього припустимо, що має місце

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{a'_1+a'_2+\ldots+a'_k}}. \tag{2}$$

Рівність (2) не співпадатиме з (1), якщо існує $a_{i+1} \neq a'_{i+1}$. Не порушуючи загальності вважатимемо, що $a_{i+1} < a'_{i+1}$. Тоді розглянемо різницю рівностей (1) і (2)

$$0 = x - x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_k}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{a'_1+a'_2+\ldots+a'_k}} =$$

$$= \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_i}} \left(\frac{1}{2^{a_{i+1}}} - \frac{1}{2^{a'_{i+1}}} + \frac{1}{2^{a_i+1}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{a_{i+2}+\ldots+a_{i+k}}} - \frac{1}{2^{a_i+1}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{a'_{i+2}+\ldots+a'_{i+k}}}\right) >$$

$$> \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_i}} \left(\frac{1}{2^{a_{i+1}}} - \frac{1}{2^{a_{i+1}+1}} - \frac{1}{2^{a_{i+1}+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_i}}\left(\frac{1}{2^{a_{i+1}+1}} - \frac{1}{2^{a_{i+1}+1}}\cdot 1\right) = 0.$$

Отримали протиріччя $0 = x - x > 0$, яке доводить єдиність і всю теорему. □

Означення 1. Формальний (скорочений) запис $\Delta^{2^\infty}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$ ряду (1) і його суми x називатимемо 2^∞-*зображенням* числа x. При цьому число (і символ алфавіту) $a_n = a_n(x)$ називається *n-ою цифрою (символом)* цього зображення, вона є функцією x (числа, що розкладається (розгортається) в ряд (1)). Коректність означення функції $a_n(x)$ випливає з єдиності 2^∞-зображення числа.

Зауваження 1. *З теореми 1 випливають твердження:*
1) $x_1 = x_2$ тоді і тільки тоді, коли $a_i(x_1) = a_i(x_2)$ при будь-якому $i \in \mathbb{N}$;
2) $x_1 < x_2$ тоді і тільки тоді, коли існує m таке, що $a_m(x_1) > a_m(x_2)$ і $a_i(x_1) = a_i(x_2)$ при $i < m$.

Нагадаємо, що для будь-якого числа $x \in [0;1]$ існує послідовність (α_n) така, що $\alpha_n \in A_2 = \{0;1\}$ і

$$x = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{2^n} + \ldots \equiv \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Останній символічний запис $\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ називається двійковим зображення числа x. Числа зліченної підмножини множини раціональних чисел мають два таких зображення. Це числа виду $\Delta^2_{c_1\ldots c_m1(0)} = \Delta^2_{c_1\ldots c_m0(1)}$. У круглих дужках ми записуємо період. Такі числа називаються двійково-раціональними.

Зауваження 2. *Розклад числа x в ряд* (1) *є класичним двійковим представленням цього числа, яке формально записується*

$$x = \Delta^2_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1-1}1\underbrace{0\ldots0}_{a_2-1}1\underbrace{0\ldots0}_{a_3-1}1\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{a_n-1}1\ldots} = \Delta^{2^\infty}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}. \qquad (3)$$

Цей запис встановлює зв'язок (відповідність) між класичним двійковим зображенням числа $x \in (0;1]$ з двосимвольним алфавітом $A_2 = \{0,1\}$ і кодуванням його засобами нескінченно-символьного алфавіту $A = \{1,2,3,\ldots\} \equiv \mathbb{N}$.

2. Критерій раціональності числа у його 2^∞-зображенні

Теорема 2. *Дійсне число $x \in (0;1)$ є раціональним тоді і тільки тоді, коли його 2^∞-зображення є періодичним.*

Доведення. 1. Спочатку доведемо, що раціональні числа мають періодичне 2^∞-зображення. Оскільки розклад (1) є класичним двійковим представленням числа x, то це твердження можна вивести з добре відомого факту: *число x є раціональним тоді і тільки тоді, коли його двійкове зображення є періодичним.*

Справді, якщо x є раціональним, то

$$x = \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m(c_1c_2\ldots c_p)}.$$

Якщо $p=1$ і $c_1=0$, то $\alpha_m=1$ і

$$x = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \ldots + \frac{\alpha_{m-1}}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^m} =$$

$$= \frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_k}} + \left(\frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+2}} + \ldots\right) = \Delta^2_{a_1\ldots a_k(1)},$$

де $k = \sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i$,

$a_1 + a_2 + \ldots + a_j = n: \ \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = j.$

Якщо $p=1$ і $c_1=1$, то $\alpha_m=0$ і

$$x = \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}1(0)},$$

тобто маємо попередній випадок.

Якщо $p>1$, то в наборі $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$ існують як 0, так і 1.

Далі, в разі потреби, для спрощення записів будемо використовувати скорочене позначення $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = \tau_k$.

Тоді знайшовши суму $c_1 + c_2 + \ldots + c_p = q$, знаходимо числа $n_1, n_2, \ldots n_g = q$, $c_1 + c_2 + \ldots + c_{n_j} = j$.

Звідки знаходимо $s_1 = n_1, \ s_2 = n_2 - c_1, \ \ldots \ s_j = n_j - (c_1 + c_2 + \ldots + c_{j-1})$.

Тоді

$$x = \frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{\tau_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{\tau_k}} + \frac{1}{2^{\tau_k+s_1}} + \frac{1}{2^{\tau_k+s_1+s_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{\tau_k+s_1+s_2+\ldots+s_g}} +$$
$$\frac{1}{2^{\tau_k+2s_1+s_2+\ldots+s_g}} + \frac{1}{2^{\tau_k+2s_1+2s_2+\ldots+s_g}} + \ldots + \frac{1}{2^{\tau_k+2s_1+2s_2+\ldots+2s_g}} + \ldots =$$
$$= \Delta^2_{a_1a_2\ldots a_k(s_1s_2\ldots s_g)},$$

тобто 2^∞-зображення числа x є періодичним.

2. Доведемо обернене твердження. Нехай $x = \Delta^{2^\infty}_{a_1a_2\ldots a_m(c_1c_2\ldots c_p)}$ — дійсне число з $(0,1)$, що має періодичне 2^∞-зображення з періодом $(c_1c_2\ldots c_p)$. Якщо покласти

$$a \equiv a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \qquad c \equiv c_1 + c_2 + \ldots + c_p,$$
$$B = \frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2}} + \ldots + \frac{1}{2^a},$$
$$D = \frac{1}{2^{c_1}} + \frac{1}{2^{c_1+c_2}} + \ldots + \frac{1}{2^c},$$

то

$$x = B + S,$$

де

$$S = 2^a \cdot D + 2^{a+c} \cdot D + 2^{a+2c} \cdot D + \dots$$

як сума всіх членів нескінченно спадної геометричної прогресії з першим членом $b_1 = 2^a \cdot D$ і знаменником $q = 2^c$ виражається

$$S = \frac{2^a \cdot D}{1 - 2^c}.$$

Оскільки B і S є раціональними числами, раціональною є і їх сума x. $\square$

3. Геометрія 2^∞-зображення чисел

Означення 2. Нехай $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ — впорядкований набір натуральних чисел. *Циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$* називається множина $\Delta^{2^\infty}_{c_1 c_2 \dots c_m}$ чисел $x \in (0, 1]$, перші m цифр 2^∞-зображення яких є $c_1, c_2, \dots, c_m$ відповідно, тобто

$$\Delta^{2^\infty}_{c_1 c_2 \dots c_m} = \{x : \quad x = \Delta^{2^\infty}_{c_1 c_2 \dots c_m a_{m+1} a_{m+2} \dots},\ a_{m+i} \in \mathbb{N},\ i = 1, 2, 3, \dots\}.$$

Безпосередньо з означення випливають наступні властивості циліндрів:

1. $\Delta^{2^\infty}_{c_1 c_2 \dots c_m} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m i}$;
2. $\Delta^{2^\infty}_{c_1 c_2 \dots c_m} \subset [a; b]$, де
$a = \dfrac{1}{2^{c_1}} + \dfrac{1}{2^{c_1 + c_2}} + \dots + \dfrac{1}{2^{c_1 + c_2 + \dots + c_m}}, \quad b = a + \dfrac{1}{2^{c_1 + c_2 + \dots + c_m}}$;
3. Для діаметра циліндра виконується рівність
$$d(\Delta^{2^\infty}_{c_1 c_2 \dots c_m}) = \frac{1}{2^{a_1 + a_2 + \dots + a_m}};$$
4. $\max \Delta^{2^\infty}_{c_1 c_2 \dots c_m (i+1)} = \inf \Delta^{2^\infty}_{c_1 c_2 \dots c_m i}, \quad i = 1, 2, \dots$;
5. Циліндри одного рангу не перетинаються або співпадають (рівні), причому
$$\Delta^{2^\infty}_{c_1 c_2 \dots c_m} = \Delta^{2^\infty}_{c'_1 c'_2 \dots c'_m} \iff c_i = c'_i \quad i = \overline{1, m};$$
6. Мають місце рівності
$$\Delta^{2^\infty}_{c_1 c_2 \dots c_m} \cap \Delta^{2^\infty}_{c'_1 \dots c'_m c'_{m+1} \dots c'_{m+k}} = \begin{cases} \varnothing, & \text{якщо } \exists\, i \le m,\ c_i \ne c'_i, \\ \Delta^{2^\infty}_{c'_1 c'_2 \dots c'_m c'_{m+1} \dots c'_{m+k}}, & \text{якщо } c_i = c'_i, i = \overline{1, m}. \end{cases}$$
7. Для довільної послідовності $(c_m) \in L$ переріз
$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta^{2^\infty}_{c_1 c_2 \dots c_m} = x = \Delta^{2^\infty}_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}$$
є точка півінтервала $(0; 1]$.

Лема 1. *Циліндр* $\Delta^{2^\infty}_{c_1c_2\ldots c_m}$ *є півінтервалом* $(a;b]$, *де*

$$a = \frac{1}{2^{c_1}} + \frac{1}{2^{c_1+c_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{c_1+c_2+\ldots+c_m}} \equiv \Delta^{2^\infty}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}[c_m+1](1)},$$

$$b = a + \frac{1}{2^{c_1+c_2+\ldots+c_m}} \equiv \Delta^{2^\infty}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}c_m(1)}.$$

Доведення. Враховуючи властивість 2, залишається довести включення

$$(a;b] \subset \Delta^{2^\infty}_{c_1c_2\ldots c_m}.$$

Нехай x — будь-яке число з $(a;b]$, тобто $0 < a < x \le b \le 1$.

Згідно з теоремою 1 число x розкладається в ряд (1):

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{a_1+\ldots+a_n}}.$$

Тоді $a_i(x) = a_i(a) = a_i(b) = c_i$ при $i \le m-1$ і

$$c_m = a_m(b) \le a_m(x) < a_m(a) = c_m + 1,$$

тобто $a_m(x) = c_m$, а отже, $x \in \Delta^{2^\infty}_{c_1c_2\ldots c_m}$. □

Наслідок 1. *Довжина циліндра обчислюється за формулою*

$$|\Delta^{2^\infty}_{c_1c_2\ldots c_m}| = \frac{1}{2^{c_1+c_2+\cdots+c_m}}.$$

Наслідок 2. *Має місце рівність (основне метричне відношення)*

$$\frac{|\Delta^{2^\infty}_{c_1c_2\ldots c_m i}|}{|\Delta^{2^\infty}_{c_1c_2\ldots c_m}|} = \frac{1}{2^i}.$$

4. Оператор зсуву символів

У множині $\mathcal{Z}^{2^\infty}_{(0;1]}$ всіх 2^∞-зображень дійсних чисел півінтервала $(0;1]$ розглянемо оператор $\widehat{\omega}$ зсуву цифр, означений рівністю

$$\widehat{\omega}\left(\Delta^{2^\infty}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}\right) = \Delta^{2^\infty}_{a_2a_3\ldots a_n\ldots},$$

який породжує функцію $\omega: \ (0;1] \to (0;1]$.

Даний оператор володіє властивістю сюр'єктивності, але не має властивості ін'єктивності, оскільки

$$\omega(\Delta^{2^\infty}_{ia_2\ldots a_n\ldots}) = \omega(\Delta^{2^\infty}_{ja_2\ldots a_n\ldots}) \quad \text{при } i \ne j.$$

Точки $\Delta^{2^\infty}_{(i)}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ є інваріантними для відображення ω.

n-кратне застосування оператора зсуву $\widehat{\omega}$ приводить до оператора $\widehat{\omega}^n$:

$$\widehat{\omega}^n\left(\Delta^{2^\infty}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}\right) = \Delta^{2^\infty}_{a_{n+1}a_{n+2}\ldots}.$$

Лема 2. 1. *Функція $\omega(x)$ є кусково-лінійною, причому лінійною на кожному циліндрі першого рангу:*

$$\omega(x) = 2^i x - 1, \quad \textit{якщо} \quad x \in \Delta^{2^\infty}_i, \tag{4}$$

тобто $x = \Delta^{2^\infty}_{ia_2\ldots a_n\ldots}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots$.

2. *В точці* $x = \Delta^{2^\infty}_{i(1)}$, $i > 1$, *вона має розрив першого роду зі стрибком* 1.

Доведення. 1. Справді,

$$x = \Delta^{2^\infty}_{ia_2a_3\ldots a_n\ldots} = \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^i}\left(\frac{1}{2^{a_2}} + \frac{1}{2^{a_2+a_3}} + \ldots\right),$$

тобто

$$x = \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^i}\omega(x),$$

звідки випливає (4).

2. Безпосередньо з означення функції ω маємо

$$\omega(\Delta^{2^\infty}_{i(1)}) = \Delta^{2^\infty}_{(1)} = 1.$$

Дослідимо поведінку функції $\omega(x)$ у правому ε-півоколі точки $x = \Delta^{2^\infty}_{i(1)}$. Оскільки умова $x \to \Delta^{2^\infty}_{i(1)} + 0$ рівносильна умові $x \in \Delta^{2^\infty}_{[i-1]j}$, де $j \to \infty$, то

$$\lim_{x \to \Delta^{2^\infty}_{i(1)} + 0} \omega(x) = \lim_{j\to\infty} \omega\left(\Delta^{2^\infty}_{[i-1]j(1)}\right) = \lim_{j\to\infty} \Delta^{2^\infty}_{j(1)} = 0.$$

□

Зауваження 3. *Всі прямі, що є графіками лінійних функцій* (4), *мають різні кутові коефіцієнти, але вісь ординат перетинають в одній точці.*

Наслідок 3. *Оператор зсуву символів ω кожну підмножину півінтервала* $(0;1]$ *нульової міри Лебега переводить в множину нульової міри Лебега, а підмножину повної міри — в множину повної міри; більше того прообразом множини нульової міри є множина нульової міри, а множини повної міри — множина повної міри.*

Лема 3. *При кожному фіксованому значенні параметра $i \in \mathbb{N}$ відображення*

$$\delta_i(x) = \Delta^{2^\infty}_{ia_1(x)\ldots a_n(x)\ldots}$$

є стискуючим відображенням з коефіцієнтом $\dfrac{1}{2^i}$ *і інваріантною точкою* $x = \Delta^{2^\infty}_{(i)}$.

Доведення. Дане твердження випливає з того, що

$$\delta_i(x) = \Delta^{2^\infty}_{ia_1(x)\ldots a_n(x)\ldots} = \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^i}\left(\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3}} + \ldots\right) = \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^i}x,$$

а тому,

$$\frac{\delta_i(x_2) - \delta_i(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1}{2^i} \quad \text{і} \quad \delta_i\left(\Delta^{2^\infty}_{(i)}\right) = \Delta^{2^\infty}_{(i)}.$$

□

5. Хвостові множини

У множині $\mathcal{Z}^{2^\infty}_{(0,1]}$ всіх 2^∞-зображень чисел $(0,1]$ введемо бінарне відношення еквівалентності «мати однаковий хвіст» (символічно: $\sim$).

Означення 3. Будемо говорити, що два 2^∞-зображення

$$\Delta^{2^\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} \quad i \quad \Delta^{2^\infty}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}$$

мають однаковий хвіст, або *перебувають у відношенні* $\sim$, якщо існують натуральні числа m та k такі, що $\alpha_{m+j} = \beta_{k+j}$ для будь-якого $j \in N$.

Очевидно, що відношення $\sim$ є відношенням еквівалентності (тобто має властивості рефлективності, симетричності та транзитивності) і розбиває множину, на якій воно задане, на класи еквівалентності. Кожен з класів еквівалентності називатимемо *хвостовою множиною*. Кожна хвостова множина однозначно визначається довільним своїм елементом (представником).

Будемо говорити, що два числа x і y мають однаковий хвіст (або пребувають у відношенні $\sim$), якщо їх 2^∞-зображення перебувають у відношенні $\sim$.

Символічно: $x \sim y$.

Лема 4. *Кожна хвостова множина є зліченною і щільною в* $(0,1]$ *множиною.*

Доведення. Нехай H — довільний клас еквівалентності, $x_0 = \Delta^{2^\infty}_{c_1\ldots c_k\ldots}$ — його представник. Тоді очевидно, що для довільного натурального m існує множина H_m таких чисел x, що $\alpha_{m+j}(x) = \alpha_{k+j}(x_0)$ для довільного $j \in N$, $k = 1, 2, \ldots$.

Тоді множина $H = \bigcup\limits_{m\in N} H_m$, будучи зліченним об'єднанням зліченних множин, є множиною зліченною.

Доведемо тепер, що множина H щільна в $(0,1]$. Оскільки належність числа x до множини H не залежить від довільної скінченної кількості перших символів його 2^∞-зображення, то в кожному з циліндрів довільного рангу m існує точка множини H. Отже, H є всюди щільною в $(0,1]$ множиною. Що й вимагалося довести. □

Теорема 3. *Фактор-множина* $G \equiv (0,1]/\sim$ *є континуальною.*

Доведення. Скористаємося методом доведення від супротивного. Припустимо, що G є зліченною. Тоді, згідно з лемою 4, півінтервал $(0,1]$ є зліченним об'єднанням зліченних множин. Але добре відомо, що остання множина є зліченною, а півінтервал $(0,1]$ є континуальною множиною. Отримана суперечність доводить теорему. □

6. Метричні задачі

Метрична теорія чисел займається розв'язанням теоретико-числових проблем з використанням засобів теорії міри, а також задач про міру (Жордана, Лебега тощо) множин дійсних чисел, які володіють заданою властивістю, зокрема визначених умовами на вживання цифр в тій чи іншій системі зображення.

Лема 5. *Для міри Лебега λ мають місце наступні рівності:*

1. $\lambda\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k}\Delta_{c_1\ldots c_m i}\right) = \left(1-\frac{1}{2^k}\right)|\Delta^{2^\infty}_{c_1\ldots c_m}| = \left(1-\frac{1}{2^k}\right)\frac{1}{2^{c_1+c_2+\ldots+c_m}}$;
2. $\lambda\left(\bigcup\limits_{i=k+1}^{\infty}\Delta_{c_1\ldots c_m i}\right) = \frac{1}{2^k}|\Delta^{2^\infty}_{c_1\ldots c_m}| = \frac{1}{2^k}\frac{1}{2^{c_1+c_2+\ldots+c_m}}$;
3. $\lambda\left(\bigcup\limits_{i=k+1}^{n}\Delta_{c_1\ldots c_m i}\right) = \left(1-\frac{1}{2^{n-k}}\right)|\Delta^{2^\infty}_{c_1\ldots c_m}| = \left(1-\frac{1}{2^{n-k}}\right)\frac{1}{2^{c_1+c_2+\ldots+c_m}}$.

Доведення. Ці рівності випливають з основного метричного відношення, виразу довжини циліндра та формул суми членів геометричної прогресії. □

Теорема 4. *Множина*

$$C = C[2^\infty, (V_n)] = \{x:\ x = \Delta^{2^\infty}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots},\ a_n(x)\in V_n\subseteq\mathbb{N}\}\qquad \text{є:}$$

1. *об'єднанням півінтервалів, якщо $V_n = \mathbb{N}$ для всіх n, більших деякого n_0;*
2. *ніде не щільною множиною, якщо нерівність $V_n \neq \mathbb{N}$ виконується нескінченну кількість разів;*
3. *міра Лебега якої обчислюється за формулою*

$$\lambda(C) = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(F_{k+1})}{\lambda(F_k)} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda(\overline{F}_{k+1})}{\lambda(F_k)}\right),$$

де $F_0 = (0;1]$, $F_k = \bigcup\limits_{c_1\in V_1}\ldots\bigcup\limits_{c_{k-1}\in V_{k-1}}\bigcup\limits_{i\in V}\Delta_{c_1\ldots c_{k-1}i}$, $\overline{F}_{k+1} = F_k\setminus F_{k+1}$.

Доведення. 1. Очевидно, що при $V_n = \mathbb{N}$ для всіх $n\in\mathbb{N}$ маємо $C = (0;1]$. Якщо $V_n = V$ для $n > n_0$, то

$$C \ni x = \frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{a_1+\ldots+a_{n_0-1}}} + \frac{1}{2^{a_1+\ldots+a_{n_0}}}\cdot x_1,$$

де

$$x_1 = \frac{1}{2^{a_{n_0+1}}} + \frac{1}{2^{a_{n_0+1}+a_{n_0+2}}} + \ldots. \tag{5}$$

Множина всіх

$$\widetilde{x} = \frac{1}{2^{a_1+\ldots+a_{n_0}}}\cdot x_1,$$

де (a_{n_0+k}) — пробігає множину всіх послідовностей натуральних чисел, є циліндром першого рангу з основою $a = a_1+a_2+\ldots+a_{n_0}$.

Тому
$$C = \bigcup_b \left[b \oplus \Delta_a^{2^\infty}\right], \quad \text{де } b \oplus D = \{x: \ x = b + d, \text{ де } d \in D\},$$
$b = \dfrac{1}{2^{a_1}} + \dfrac{1}{2^{a_1+a_2}} + \ldots + \dfrac{1}{2^{a_1+\ldots+a_{n_0-1}}}$, а $(a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1})$ — пробігає $\underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \ldots \times \mathbb{N}}_{n_0-1}$, що і вимагалось довести.

2. Скористаємось означенням ніде не щільної множини, а саме: покажемо, що в будь-якому інтервалі $(c; d)$ існує підінтервал $(c'; d')$ вільний від точок множини C.

Нехай $c = \Delta^{2^\infty}_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}$ і $d = \Delta^{2^\infty}_{d_1d_2\ldots d_n\ldots}$. Оскільки $c < d$, то існує m таке, що
$$c_m > d_m \quad \text{і} \quad c_j = d_j \quad \text{при} \quad j < m.$$

Таким інтервалом $(c'; d')$ є
$$(c'; d') = \nabla_{d_1d_2\ldots d_m[d_{m+1}+1]\underbrace{1\ldots1}_{k}j},$$
де k таке, що $V_{m+k+2} \neq \mathbb{N}$ і $j = \mathbb{N} \setminus V_{m+k+2}$.

Справді цей інтервал лежить правіше c, бо $c_m > d_m$ і лівіше d, бо $d_{m+1}+1 > d_{m+1}$. А не містить він точок множини C, бо $j \in \overline{V} = \mathbb{N} \setminus V$.

3. Оскільки F_k — це об'єднання циліндрів рангу k, серед внутрішніх точок яких є точки множини C, то $C \subset F_{k+1} \subset F_k$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ і більше того,
$$C = \lim_{k\to\infty} F_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \quad \text{і} \quad \lambda(C) = \lim_{k\to\infty} \lambda(F_k).$$

Тому з рівності $F_{k+1} = F_k \backslash \overline{F}_{k+1}$ маємо $\lambda(F_k) = \lambda(F_{k-1}) - \lambda(\overline{F}_k)$. Звідки
$$\lambda(F_k) = \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda(F_i)}{\lambda(F_{i-1})} = \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda(F_{i-1}) - \lambda(\overline{F}_i)}{\lambda(F_{i-1})} = \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_i)}{\lambda(F_{i-1})}\right).$$

А отже,
$$\lambda(C) = \lim_{k\to\infty} \lambda(F_k) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_i)}{\lambda(F_{i-1})}\right).$$

□

Наслідок 4. *Міра Лебега множини $C[2^\infty, (V_n)]$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли розбігається ряд*
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\overline{F}_{k+1})}{\lambda(F_k)}.$$

Наслідок 5. *Якщо послідовність множин (V_n) є сталою, а саме $V_n = V \neq \mathbb{N}$, то множина $C[2^\infty, \{V_n\}]$ є множиною нульової міри Лебега.*

Теорема 5. *Множина $C[2^\infty, V]$ є самоподібною, якщо V — скінченна, і N-самоподібною, якщо V — нескінченна, самоподібна і фрактальна розмірність Хаусдорфа–Безиковича якої є розв'язком рівняння*

$$\sum_{v\in V}\frac{1}{2^{vx}} = 1.$$

Доведення. Дане твердження випливає з того, що

$$C[2^\infty, V] = \bigcup_{v\in V}\overline{\Delta}_v^{2^\infty},$$

де $\overline{\Delta}_v^{2^\infty} = \Delta_v^{2^\infty}\cap C[2^\infty, V]$, $C[2^\infty, V]\overset{k_v}{\sim}\overline{\Delta}_v^{2^\infty}$, $k_v = \dfrac{1}{2^v}$. □

Зауваження 4. *Множина $C\equiv C[2^\infty, V]$ є інваріантною відносно оператора зсуву $\widehat{\omega}$ символів 2^∞-зображення.*

Теорема 6. *Нехай c і s — фіксовані натуральні числа. Множина*

$$D\equiv D[2^\infty, \overline{cs}] = \{x:\ x = \Delta^{2^\infty}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots},\quad \text{де } \overline{a_na_{n+1}}\neq\overline{cs}\ \forall\, n\in\mathbb{N}\}$$

є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.

Доведення. Доведемо, що $D[2^\infty, \overline{cs}]$ є ніде не щільною множиною згідно з означенням.

Нехай (a, b) — довільний інтервал, що належить $(0,1]$. Легко вказати циліндр $\Delta^{2^\infty}_{c_1\ldots c_m}\subset(a,b)$.

Справді, оскільки $a<b$, то існує k таке, що $a_k(a)>a_k(b)$, але $a_i(a)=a_i(b)$ при $i<k$. Тоді $\Delta^{2^\infty}_{a_1(b)\ldots a_k(b)[a_{k+1}(b)+1]}\subset(a,b)$, а $\Delta^{2^\infty}_{a_1(b)\ldots a_k(b)[a_{k+1}(b)+1]cs}\cap C=\varnothing$. Тому множина $D[2^\infty, \overline{cs}]$ є ніде не щільною за означенням.

Доведемо, що міра Лебега множини $D[2^\infty, \overline{cs}]$ рівна нулю. Можливі випадки
1) $c=s$; 2) $c\neq s$.

Нехай $\overline{\Delta}^{2^\infty}_{c_1\ldots c_m}\equiv\Delta^{2^\infty}_{c_1\ldots c_m}\cap D$. Тоді у першому випадку

$$D = \left[\bigcup_{i\neq c}\overline{\Delta}_i^{2^\infty}\right]\cup\left[\bigcup_{i\neq c}\overline{\Delta}_{ci}^{2^\infty}\right].$$

У другому випадку

$$D = \left[\bigcup_{i\neq c}\overline{\Delta}_i^{2^\infty}\right]\cup\left[\bigcup_{c\neq i\neq s}\overline{\Delta}_{ci}^{2^\infty}\right]\cup\left[\bigcup_{c\neq i\neq s}\overline{\Delta}_{cci}^{2^\infty}\right]\cup\ldots\cup\left[\bigcup_{c\neq i\neq s}\overline{\Delta}^{2^\infty}_{\underbrace{c\ldots c}_{k}i}\right]\cup\ldots.$$

Нехай $F_0=(0,1]$, F_{2k} — об'єднання циліндрів рангу $2k$, які містять точки множини $D[2^\infty, \overline{cs}]$,

$$\overline{F}_{2(k+1)} = F_{2k}\setminus F_{2(k+1)}. \tag{6}$$

Очевидно, що $F_{2k} \supset F_{2(k+1)} \supset D[2^\infty, \overline{cs}]$ $\forall k \in N$,

$$D[2^\infty, \overline{cs}] = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{2k} = \lim_{k\to\infty} F_{2k}.$$

За неперервністю міри Лебега зверху

$$\lambda(D[2^\infty, \overline{cs}]) = \lim_{k\to\infty} \lambda(F_{2k}).$$

Тоді

$$\lambda(D[2^\infty, \overline{cs}]) = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{\lambda(F_{2k})}{\lambda(F_{2(k-1)})} \cdot \frac{\lambda(F_{2(k-1)})}{\lambda(F_{2(k-2)})} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda(F_2)}{\lambda(F_0)}\right] = \lim_{k\to\infty} \prod_{m=1}^{k} \frac{\lambda(F_{2m})}{\lambda(F_{2(m-1)})} =$$

$$= \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_{2m})}{\lambda(F_{2(m-1)})}. \tag{7}$$

З (6) маємо

$$\lambda(F_{2(k+1)}) = \lambda(F_{2k}) - \lambda(\overline{F}_{2(k+1)})$$

і

$$\frac{\lambda(F_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})} = 1 - \frac{\lambda(\overline{F}_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})}.$$

Підставивши в (7) отриманий вираз, одержимо

$$\lambda(D[2^\infty, \overline{cs}]) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})}).$$

Останній нескінченний добуток розбігається до нуля тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\overline{F}_{2(k+1)})/\lambda(F_{2k}) = \infty. \tag{8}$$

Знайдемо оцінки останнього відношення.

Нехай $\Delta^{2^\infty}_{c_1\ldots c_{2k}}$ — циліндр з F_{2k}. Можливі випадки: 1)$c_{2k} = c$, 2)$c_{2k} \neq c$.

Якщо $c_{2k} = c$, то $\nabla^{2^\infty}_{c_1\ldots c_{2k}s} \bigcap D[2^\infty, \overline{cs}] = \varnothing$ і

$$\frac{|\Delta^{2^\infty}_{c_1\ldots c_{2k}s}|}{|\Delta^{2^\infty}_{c_1\ldots c_{2k}}|} = \frac{1}{2^s}.$$

Якщо $c_{2k} \neq c$, то $\nabla^{2^\infty}_{c_1\ldots c_{2k}cs} \bigcap D[2^\infty, \overline{cs}] = \varnothing$ і

$$\frac{|\Delta^{2^\infty}_{c_1\ldots c_{2k}cs}|}{|\Delta^{2^\infty}_{c_1\ldots c_{2k}}|} = \frac{1}{2^{c+s}}.$$

Тому, враховуючи це, маємо

$$0 < \frac{1}{2^{c+s}} \leq \frac{\lambda(\overline{F}_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})} \leq \frac{1}{2^s} < 1.$$

Отже, ряд (8) розбігається, оскільки не виконується необхідна умова збіжності і тому $\lambda(D[2^\infty, \overline{cs}]) = 0$. □

Теорема 7. *Множина E всіх чисел півінтервалу $(0;1]$ з обмеженими символами 2^∞-зображень є множиною нульової міри Лебега.*

Доведення. Позначимо через E_s множину чисел відрізка $(0,1]$, символи 2^∞-зображення яких менші за s. Тоді $E_s = C[2^\infty, V]$, де $V = \{0, 1, \ldots, s-1\}$ і згідно з наслідком 5 теореми 4 маємо $\lambda(E_s) = 0$.

Оскільки кожне число з обмеженими 2^∞-символами, очевидно, належить множині E_s при достатньо великому s, то $E = \bigcup\limits_{s=1}^{\infty} E_s$. Тому $\lambda(E) \leqslant \sum\limits_{s=1}^{\infty} \lambda(E_s) = 0$. Отже, $\lambda(E) = 0$, що й вимагалось довести. □

7. 2^∞-циліндри і фрактальна розмірність Хаусдорфа–Безиковича

Оскільки 2^∞-циліндри є двійковими циліндрами рангу $c_1 + c_2 + \ldots + c_m$, а саме:

$$\Delta^{2^\infty}_{c_1 c_2 \ldots c_m} = \Delta^2_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1-1}1\underbrace{0\ldots0}_{c_2-1}1\ldots\underbrace{0\ldots0}_{c_m-1}1},$$

то згідно з теоремою Біллінгслі [**14**] при визначенні (обчисленні) фрактальної розмірності Хаусдорфа–Безиковича можна обмежитись 2^∞-циліндрами.

Нагадаємо, що *розмірністю Хаусдорфа–Безиковича* обмеженої множини $E \subset R^1$ називається число

$$\alpha_0(E) = \sup\{\alpha : \ H_\alpha(E) \neq 0\} = \inf\{\alpha : \ H_\alpha(E) = 0\},$$

де $H_\alpha(E)$ — *α–мірна міра Хаусдорфа* множини E, яка визначається рівністю

$$H^\alpha(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} m^\alpha_\varepsilon(E), \quad \text{де} \quad m^\alpha_\varepsilon(E) = \inf_{d(E_i)<\varepsilon} \left\{ \sum_i d^\alpha(E_i) : \ E \subset \bigcup_i E_i \right\},$$

$d(E_i)$ — діаметр множини E_i, а інфімум береться за всіма покриттями $\{E_i\}$ множини E, діаметри елементів яких не перевищують ε.

Нехай W — клас множин, які є об'єднанням 2^∞-циліндрів такого вигляду:

$$(1) \quad \bigcup_{i=k}^{n} \Delta^{2^\infty}_{c_1\ldots c_m i}, \qquad\qquad (2) \quad \bigcup_{i=k}^{\infty} \Delta^{2^\infty}_{c_1\ldots c_m i},$$

де k, n — довільні натуральні числа.

Зрозуміло, що кожен циліндр належить до класу W, бо при $k = 1$ множина (2) є циліндром, як і перша при $k = n$.

Лема 6. *Для довільного півінтервала $u = (a, b] \subset (0, 1]$ існує не більше 4-х множин з класу W, які покривають u і мають довжину, яка не перевищує $|u|$.*

Доведення. Нехай $u = (a, b)$. Можливі випадки:

1. Числа a і b належать різним 2^∞-циліндрам 1-го рангу;
2. Числа a і b належать одному 2^∞-циліндру 1-го рангу.

Розглянемо кожен з випадків окремо.

1.1. Нехай a і b належать сусіднім 2^∞-циліндрам 1-го рангу $\Delta^{2^\infty}_{a_1(b)+1}$ і $\Delta^{2^\infty}_{a_1(b)}$ відповідно і $c = \Delta^{2^\infty}_{[a_1(b)+1](1)}$.

а) Якщо $a = c$ (рівносильно: $a_j(a) = 1$ при $j > 1$), то для покриття u досить двох множин з класу W:

$$\bigcup_{j=a_2(b)+1}^{\infty} \Delta^{2^\infty}_{a_1(b)j}, \qquad \Delta^{2^\infty}_{a_1(b)a_2(b)}, \tag{9}$$

кожна з яких має довжину, меншу за $b - a$ (бо перша належить $(a, b]$, друга згідно з властивістю 6 циліндрів).

б) Якщо $a \neq c$, то знайдеться $a_k(a) \neq 1$. Розглянемо найменше з таких k. Тоді $\Delta^{2^\infty}_{a_1(a)\ldots a_{k-1}(a)1} \subset (a, c]$ і множини

$$\bigcup_{j=1}^{a_k(a)-1} \Delta^{2^\infty}_{a_1(a)\ldots a_k(a)j} \qquad \text{і} \qquad \Delta^{2^\infty}_{a_1(a)\ldots a_k(a)} \tag{10}$$

покривають $(a, c]$ і мають довжину, яка не перевищує $c - a$, а отже, і $b - a$.

Півінтервал $(c, b]$ при цьому покривають дві множини (10).

Отже, для покриття $(a, b]$ досить 4-х множин з W (це множини (9) і (10).)

1.2. Якщо існує циліндр $\Delta^{2^\infty}_m \subset (a, b]$, то $(a, b]$ множини

$$\bigcup_{j=m}^{\infty} \Delta^{2^\infty}_{j}, \qquad \bigcup_{j=a_2(b)+1}^{\infty} \Delta^{2^\infty}_{a_1(b)j}, \qquad \Delta^{2^\infty}_{a_1(b)a_2(b)},$$

які належать W і мають довжини менші $b - a$.

2. Нехай a і b належать одному циліндру 1-го рангу $\Delta^{2^\infty}_{a_1(b)}$. Тоді знайдеться натуральне число m таке, що a і b належать одному циліндру рангу m, але різним циліндрам рангу $m + 1$:

$$\Delta^{2^\infty}_{a_1(b)\ldots a_m(b)a_{m+1}(a)} \qquad \text{і} \qquad \Delta^{2^\infty}_{a_1(b)\ldots a_m(b)a_{m+1}(b)}.$$

Повторивши міркування пункту 1 стосовно циліндра $\Delta^{2^\infty}_{a_1(b)\ldots a_m(b)}$, дійдемо до того ж висновку: для покриття $(a, b]$ досить не більше чотирьох множин з W, які мають довжини не більші, ніж $b - a$. □

Теорема 8. *При обчисленні розмірності Хаусдорфа–Безиковича довільної борелівської множини з* $(0, 1]$ *можна обмежуватись покриттями множинами з класу* W.

Доведення. Справді, якщо u — довільний півінтервал, що бере участь в покритті E, то існує не більше 4-х множин ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 з W для яких $|\omega_i|^\alpha \leq |u|^\alpha$ при довільному $\alpha > 0$. Якщо

$$l^\alpha_\varepsilon(E) = \inf_{|v_k| \leq \varepsilon} \sum_k |v_k|^\alpha,$$

де $E \subset \bigcup\limits_k v_k$ і $v_k \in W$, то $m^\alpha_\varepsilon(E) \le l^\alpha_\varepsilon(E) \le 4m^\alpha_\varepsilon(E)$ для довільного $\varepsilon > 0$.

Тому $H^\alpha(E) \le H^\alpha_{2^\infty}(E) \equiv \lim\limits_{\varepsilon\to\infty} l^\alpha_\varepsilon(E) \le 4H^\alpha(E)$, тобто $H^\alpha_{2^\infty}(E)$ і $H^\alpha(E)$ одночасно (по α) набувають значень 0 і ∞. І тому $\alpha_0(E) = \inf\{\alpha : H^\alpha_{2^\infty}(E)\}$, що й вимагалося довести. □

8. Ймовірнісна теорія чисел у 2^∞-зображенні

У традиційному розумінні ймовірнісна теорія чисел займається теоретико-числовими проблемами з використанням ймовірнісних засобів (моделей, прийомів та методів). Ймовірнісна теорія зображень дійсних чисел розв'язує ймовірнісні проблеми (задачі) з використанням різних систем зображення чисел. Її важливою складовою є вивчення розподілів ймовірностей на множинах дійсних чисел, визначених умовами на їх зображення у тій чи іншій системі, зокрема випадкових величин, символи (цифри) зображення яких є випадковими величинами з наперед заданими розподілами.

Використаємо 2^∞-зображення чисел для моделювання і дослідження розподілів випадкових величин.

8.1. Розподіл 2^∞-цифр рівномірно розподіленої випадкової величини.

Теорема 9. *Якщо випадкова величина $\tau = \Delta^{2^\infty}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_k\ldots}$ має рівномірний на $[0,1]$ розподіл, то символи τ_k її 2^∞-зображення є незалежними випадковими величинами, що мають однакові розподіли*

$$P\{\tau_k = i\} = \frac{1}{2^i}, \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{11}$$

Доведення. Оскільки τ має рівномірний розподіл на $[0,1]$, то

1. $P\{\tau = a\} = 0$ для довільного $a \in [0,1]$;

2. $P\{\tau \in (a,b)\} = P\{\tau \in [a,b]\} = P([a,b]) = b-a$, зокрема для довільного циліндра $\Delta^{2^\infty}_{c_1\ldots c_m}$, враховуючи вираз його довжини, має місце рівність

$$P(\Delta^{2^\infty}_{c_1\ldots c_m}) = |\Delta^{2^\infty}_{c_1\ldots c_m}| = \frac{1}{2^{c_1+c_2+\ldots+c_m}} = \prod_{i=1}^m \frac{1}{2^{c_i}}.$$

Скористаємося методом математичної індукції, тобто доведемо, що для довільного $k \in N$ випадкова величина τ_k не залежить від τ_j, де $j < k$ і мають місце рівності (11).

Враховуючи неперервність розподілу випадкової величини τ та властивості циліндрів, маємо

$$P\{\tau_1 = i\} = P\{\tau \in \Delta^{2^\infty}_i\} = P(\Delta^{2^\infty}_i) = |\Delta^{2^\infty}_i| = \frac{1}{2^i};$$

$$P\{\tau_1 = i, \tau_2 = j\} = P\{\tau \in \Delta^{2^\infty}_{ij}\} = P(\Delta^{2^\infty}_{ij}) = |\Delta^{2^\infty}_{ij}| = \frac{1}{2^{i+j}} =$$

$$= |\Delta_i^{2^\infty}| \cdot |\Delta_j^{2^\infty}| = P(\Delta_i^{2^\infty})P(\Delta_j^{2^\infty}) = P\{\tau_1 = i\} \cdot P\{\tau_2 = j\} = \frac{1}{2^i} \cdot \frac{1}{2^j};$$

$$P\{\tau_2 = i\} = P\{\tau \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta_{ji}^{2^\infty}\} = P(\bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta_{ji}^{2^\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} |\Delta_{ji}^{2^\infty}| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+j}} = \frac{1}{2^i} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^i}.$$

Аналогічно,

$$P\{\tau_{k+1} = i\} = P\{\tau \in \bigcup_{j_1=1}^{\infty} \dots \bigcup_{j_k=1}^{\infty} \Delta_{j_1 \dots j_k i}^{2^\infty}\} = \sum_{j_1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_k=1}^{\infty} |\Delta_{j_1 \dots j_k i}^{2^\infty}| =$$
$$= \frac{1}{2^i} \sum_{j_1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j_1+j_2+\dots+j_k}} = \frac{1}{2^i}.$$

Оскільки остання ймовірність не залежить від k, а лише від i, то τ_k є незалежними і однаково розподіленими. □

8.2. Випадкова величина з незалежними 2^∞-цифрами.

Теорема 10. *Якщо символи ξ_k 2^∞-зображення випадкової величини*

$$\xi = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \dots}^{2^\infty}$$

є незалежними випадковими величинами, які набувають значень $1, 2, \dots, i, \dots$ з ймовірностями $p_{1k}, p_{2k}, \dots p_{ik}, \dots$ відповідно ($p_{1k} + \dots + p_{ik} + \dots = 1, \quad k \in \mathbb{N}$), то розподіл ξ є або чисто дискретним, або чисто неперервним (неатомарним), причому чисто дискретним — тоді і тільки тоді, коли

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\} > 0.$$

Точковий спектр (множина атомів) дискретно розподіленої випадкової величини ξ складається з точки x_0 такої, що $p_{a_j(x_0)j} = \max_i \{p_{ik}\}$, і всіх точок x, які мають властивість $p_{a_j(x)j} > 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$ і існує таке $m \in \mathbb{N}$, що $a_j(x) = a_j(x_0)$ при $j \geq m$.

Доведення. З незалежності ξ_k і єдиності 2^∞-зображення випливає, що

$$P\{\xi = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}^{2^\infty}\} = \prod_{k=1}^{\infty} p_{c_k k}, \quad \text{тобто} \quad P\{\xi = x\} = \prod_{j=1}^{\infty} p_{a_j(x)j}.$$

Спочатку доведемо н е о б х і д н і с т ь: якщо $M > 0$, то розподіл ξ є чисто дискретним. Оскільки $P\{\xi = x_0\} = M$, то $P\{\xi = x_0\} > 0$.

Якщо $p_{a_k(x')k} > 0 \; \forall \; k \in N$ і 2^∞-зображення точки x' відрізняється від зображення точки x_0 не більше, ніж першими $(m-1)$ 2^∞-символами, то

$$P\{\xi = x'\} = \prod_{k=1}^{m-1} p_{a_k(x')k} \cdot \prod_{k=m}^{\infty} p_{a_k(x_0)k} = \prod_{k=1}^{m-1} p_{a_k(x')k} \cdot \frac{M}{\prod\limits_{k=1}^{m} p_{a_k(x_0)k}}.$$

Нехай A_m — множина всіх точок x', 2^∞-символи яких співпадають з 2^∞-символами точки x_0, починаючи з m. Тоді послідовність множин A_m має властивості:

1.$\{x_0\} = A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_m \subset A_{m+1} \subset \ldots$

$$2.P\{\xi \in A_m\} = \sum_{a_1 \in N} \cdots \sum_{a_{m-1} \in N} \left(\prod_{k=1}^{m-1} p_{a_k(x')k} \cdot \frac{M}{\prod\limits_{k=1}^{m} p_{a_k(x_0)k}} \right) = \frac{M}{\prod\limits_{k=1}^{m} p_{a_k(x_0)k}} \to 1,$$

коли $m \to \infty$.

Отже, зліченна множина $A = \lim\limits_{m\to\infty} A_m = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m$ є носієм розподілу випадкової величини ξ, тобто розподіл є дискретним.

Д о с т а т н і с т ь. Якщо ξ має дискретний розподіл, то існує x' таке, що

$$0 < P\{\xi = x'\} = \prod_{k=1}^{\infty} p_{a_k(x')k} \le \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\} = M,$$

тобто $M > 0$. □

Зауваження 5. *Точковий спектр (множина атомів) D_ξ розподілу випадкової величини ξ є хвостовою множиною, представником якої є число x_0, означене умовами:*

$$p_{a_k(x_0)k} = \max_{i \in N} \{p_{ik}\}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Теорема 11. *Неперервна ($M = 0$) випадкова величина ξ, 2^∞-символи якої є незалежними, має або чисто абсолютно неперервний, або чисто сингулярно неперервний розподіл.*

Доведення. Нехай m — натуральне число, $(\delta_1, ..., \delta_m)$ — впорядкований набір натуральних чисел, $\delta \equiv (\delta_1 ... \delta_m)$.

Відображення $(0;1]$ в $(0;1]$, визначене рівністю

$$T^m_\delta(x) = \Delta^{2^\infty}_{\delta_1 \ldots \delta_m a_1(x) \ldots a_n(x) \ldots},$$

назвемо T^m_δ*-відображенням.*

Очевидно, що T^m_δ-відображення має єдину інваріантну точку x_0, яка має чисто періодичне 2^∞-зображення з періодом $(\delta_1 ... \delta_m) : x_0 = \Delta^{2^\infty}_{(\delta_1 \ldots \delta_m)}$.

T^m_δ*-відображенням множини* E називається множина E' T^m_δ-образів всіх $x \in E$, тобто

$$T^m_\delta(E) = \left\{ x : \ \Delta^{2^\infty}_{\delta_1 \ldots \delta_m a_1 \ldots a_k \ldots}, \quad \text{де} \quad \Delta^{2^\infty}_{a_1 \ldots a_n \ldots} \in E \right\}.$$

Легко бачити, що $T^m_\delta\left((0;1]\right) = \Delta^{2^\infty}_{\delta_1 \ldots \delta_m}$ і множини E та $E' = T^m_\delta(E)$ є подібними з коефіцієнтом

$$k = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{2^{\delta_i}} = \frac{1}{2^{\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_m}}.$$

Звідки отримаємо рівність для міри Лебега

$$\lambda\left[T_\delta^m(E)\right] = k\lambda(E),$$

а тому, $\lambda\left[T_\delta^m(E)\right]$ і $\lambda(E)$ рівні нулю одночасно.

Через $T^m(x)$ позначимо множину всіх образів x під дією T_δ^m-відображення, де δ пробігає множину всеможливих наборів довжини m натуральних чисел.

Нехай E — деяка борелівська множина з $(0;1]$, $T^0(x) \equiv x$, T — множина всеможливих перетворень T^m для всіх скінченних значень m. Оскільки подія $A = \{\xi \in T(E)\}$ є залишковою множиною відносно всіх σ-алгебр B_k, породжених першими $\tau_1, ..., \tau_k$ (для довільного скінченного k), то за законом 0 і 1 Колмогорова **[15]** $P(A) = 0$ або $P(A) = 1$.

Можливі випадки:

1) існує множина E міри Лебега нуль така, що $P\{\xi \in E\} > 0$;

2) такої множини E немає, тобто для кожної E: з $\lambda(E) = 0$ випливає $P\{\xi \in E\} = 0$.

У першому випадку $P\{\xi \in T(E)\} = 1$ і $\lambda\{T(E)\} = 0$, тобто ξ має чисто сингулярно-неперервний розподіл; у другому — чисто абсолютно неперервний, згідно з означенням. Отже, розподіл в.в. ξ є чистим. □

Теорема 12. *Випадкова величина* $\xi = \Delta^{2^\infty}_{\xi_1\xi_2...\xi_k...}$ *з розподілами* 2^∞*–символів* ξ_k*:* $\mathrm{P}\{\xi_k = i\} = p_{ik},\ i \in N$, *має чистий лебегівський тип, причому*

1. дискретний — тоді і тільки тоді, коли

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\} > 0;$$

2. абсолютно неперервний — тоді і тільки тоді, коли

$$S = \prod_{k=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\frac{p_{ik}}{2^i}}) > 0; \tag{12}$$

3. сингулярний — в решті випадків, тобто, коли $M = 0 = S$.

Доведення. Нехай $\{(\Omega_k, B_k, \mu_k)\}$ і $\{(\Omega_k, B_k, \nu_k)\}$ дві послідовності ймовірнісних просторів такі, що $\Omega_k = \mathbb{N},\ B_k$ — σ-алгебра всіх підмножин Ω_k,

$$\mu_k(i) = p_{ik},\ \nu_k(m) = \frac{1}{2^i},\ k \in \mathbb{N},$$

де p_{ik} — елемент матриці $\|p_{ik}\|$, що визначає розподіл випадкової величини ξ. Очевидно, що міра μ_k є абсолютно неперервною відносно міри ν_k ($\mu_k \ll \nu_k$) для всіх $k \in N$. Розглянемо нескінченні добутки ймовірнісних просторів:

$$(\Omega, B, \mu) = \prod_{k=1}^{\infty} (\Omega_k, B_k, \mu_k),\ (\Omega, B, \mu) = \prod_{k=1}^{\infty} (\Omega_k, B_k, \nu_k).$$

З теореми Какутані [**5**] випливає, що $\mu \ll \nu$ тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} \rho(\mu_k, \nu_k) > 0, \text{ \textit{де} } \rho(\mu_k, \nu_k) = \int\limits_{\Omega_k} \sqrt{\frac{d\mu_k}{d\nu_k}} d\nu_k - \text{\textit{інтеграл Хелінгера.}}$$

У даному випадку

$$\prod_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_k} \sqrt{\frac{d\mu_k}{d\nu_k}} d\nu_k > 0 \ \Leftrightarrow \ \prod_{k=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\frac{p_{ik}}{2^i}}) > 0.$$

Отже, з умови (12) випливає умова абсолютної неперервності міри μ відносно міри ν. Розглянемо вимірне відображення $\Omega \xrightarrow{f} [0;1]$, яке визначено рівністю:

$$\forall\ \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_k, \ldots) \in \Omega: \ f(\omega) = \Delta^{2^\infty}_{\omega_1 \ldots \omega_k \ldots}.$$

Для довільної борелівської множини E визначимо образи μ^* і ν^* мір μ і ν під дією відображення f наступним чином: $\mu^*(E) = \mu(f^{-1}(E)), \ \nu^*(E) = \nu(f^{-1}(E))$. Міра μ^* співпадає з ймовірнісною мірою P_ξ, а міра ν^* — з ймовірнісною мірою P_ψ, еквівалентною мірі Лебега λ. З абсолютної неперервності міри μ відносно міри ν випливає абсолютна неперервність міри μ^* відносно міри ν^*. Оскільки, $\nu^* \sim \lambda$, то з умови (12) випливає абсолютна неперервність розподілу випадкової величини ξ. □

Зауваження 6. *Необхідною умовою для виконання* (12) *є асимптотична властивість матриці* $\|p_{ik}\|$*:*

$$p_{ik} \to \frac{1}{2^i} \ (k \to \infty). \tag{13}$$

Ця умова ще не гарантує збіжності добутку (12)*. Для цього* p_{ik} *має прямувати до* $\frac{1}{2^i}$ *досить швидко.*

Лема 7. *Функція розподілу* F_ξ *випадкової величини* ξ *подається у вигляді*

$$F_\xi(x) = \beta_{a_1(x)1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{a_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{a_j(x)j} \right),$$

де $\beta_{a_k(x)k} = \sum\limits_{j=a_k+1}^{\infty} p_{jk}, \quad k \in N.$

Доведення. Згідно з означенням функції розподілу $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$. Подія $\{\xi < x\}$ є об'єднанням несумісних подій

$$\{\xi_1 > a_1(x)\}, \ \{\xi_1 = a_1(x) \wedge \xi_2 > a_2(x)\}, \ldots \{\xi_j = a_j(x), \, j = \overline{1, k-1} \wedge \xi_k > a_k(x)\}, \ldots.$$

Тому $P\{\xi < x\} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P\{\xi_j = a_j(x), \, j = \overline{1, k-1} \wedge \xi_k > a_k(x)\}.$

Але з незалежності випадкових подій ξ_k отримаємо

$$P\{\xi_j = a_j(x),\ j = \overline{1, k-1} \wedge \xi_k > a_k(x)\} = \beta_{a_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{a_j(x)j}.$$

А отже,

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = \beta_{a_1(x)1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{a_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{a_j(x)j} \right).$$

□

Наслідок 6. *Функція розподілу випадкової величини ξ у випадку однакової розподіленості її 2^∞-цифр ($p_{ik} = p_i, \ \forall\, k \in \mathbb{N}$) має вигляд*

$$F_\xi(x) = \beta_{a_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{a_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} p_{a_j(x)} \right).$$

Кажуть [**3, 4**], що перетворення g відрізка $[0,1]$, тобто бієктивне відображення $[0,1]$ на $[0,1]$, зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича, якщо для довільної борелівської множини $E \subset [0,1]$ її образу $E' = g(E)$ розмірності співпадають, тобто $\alpha_0(E) = \alpha_0(E')$. Якщо ж знайдеться борелівська множина $E \subset [0,1]$ така, що $\alpha_0(E) \neq \alpha_0(E')$, то кажуть, що перетворення g не зберігає розмірності Хаусдорфа–Безиковича.

Очевидно, що множина всіх перетворень відрізка $[0,1]$ відносно операції «композиція» (суперпозиція) утворює групу, нейтральним елементом якої є тотожне перетворення, а симетричним для кожного елемента — обернене перетворення.

Неперервні перетворення [0, 1] вичерпуються строго зростаючими функціями розподілу на [0, 1] або функціями виду $1 - F$, де F — функція розподілу.

Теорема 13. *Функція розподілу випадкової величини ξ з незалежними однаково розподіленими 2^∞-цифрами зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича тоді і тільки тоді, коли $p_i = 2^{-(i+1)}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$.*

Доведення. Необхідність (від супротивного). Припустимо, що функція розподілу зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича і при цьому існує $p_i \neq \dfrac{1}{2^{i+1}}$. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що

$$p_i < \frac{1}{2^{i+1}}. \tag{14}$$

Тоді існує $p_m > \dfrac{1}{2^{m+1}}$. Справді, якщо б $p_k \leq \dfrac{1}{2^{k+1}}$ при $k \neq i$, то

$$1 - p_i = \sum_{i \neq k \in \mathbb{N}} p_k \leq \sum_{i \neq k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{i+1}},$$

що суперечить нерівності (14).

Розглянемо p_c, де $i \neq c \neq m$. Для нього $p_c \leq \dfrac{1}{2^{c+1}}$ або $p_c \geq \dfrac{1}{2^{c+1}}$. Виберемо серед чисел p_i, p_m, p_c два, для яких виконуються нерівності однакового знаку. Нехай це будуть p_l і p_j.

Розглянемо множину $C[2^\infty, V]$, яка містить лише числа, 2^∞-символи яких належать множині $V = \{l, j\}$. Вона є самоподібним фракталом, розмірність Хаусдорфа–Безиковича якого співпадає з самоподібною розмірністю і є розв'язком рівняння

$$\left(\frac{1}{2^{l+1}}\right)^x + \left(\frac{1}{2^{j+1}}\right)^x = 1.$$

Образом цієї множини під дією перетворення F_ξ є теж самоподібний фрактал, розмірність Хаусдорфа–Безиковича якого є розв'язком рівняння

$$p_l^x + p_j^x = 1.$$

Але, очевидно, що ці числа не співпадають. □

Зауваження 7. *Необхідною умовою збереження фрактальної розмірності Хаусдорфа–Безиковича функцією розподілу випадкової величини з незалежними 2^∞–цифрами є умова*

$$p_{ik} \to \frac{1}{2^{i+1}}, \quad \text{коли} \quad k \to \infty.$$

8.3. Марковська залежність 2^∞-цифр випадкової величини. Нехай (ζ_n) — послідовність дискретно розподілених випадкових величин, які набувають натуральних значень і утворюють однорідний ланцюг Маркова з початковими ймовірностями $p_1, p_2, \ldots, p_m, \ldots$ і матрицею перехідних ймовірностей $\|p_{ij}\|$, тобто $P\{\zeta_1 = m\} = p_m > 0,\ m \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{m=1}^{\infty} p_m = 1$ і

$$P\{\zeta_{k+1} = j | \zeta_k = i\} = p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1 \quad \forall i \in N.$$

Розглядається випадкова величина $\zeta = \Delta^{2^\infty}_{\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_k\ldots}$.

Зауваження 8. *Якщо всі рядки матриці $\|p_{ij}\|$ однакові і співпадають з ймовірнісним вектором $(p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots)$, то ми матимемо випадок незалежності та однакової розподіленості випадкових величин ζ_k, про який йшлося вище. Якщо при цьому ще й $p_k = 2^{-k}$, то розподіл ζ буде рівномірним на $[0, 1]$.*

В силу однозначності 2^∞-зображення кожного числа $x \in (0, 1]$ очевидним є наступне твердження.

Лема 8. *Для довільної послідовності натуральних чисел* (a_n) *мають місце наступні рівності*

$$P\{\zeta \in \Delta^{2^\infty}_{a_1a_2\ldots a_n}\} = p_{a_1}\prod_{k=1}^{n-1} p_{a_ka_{k+1}}, \quad P\{\zeta \in \Delta^{2^\infty}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}\} = p_{a_1}\prod_{k=1}^{\infty} p_{a_ka_{k+1}}.$$

Теорема 14. *Розподіл випадкової величини* ζ *має атоми тоді і тільки тоді, коли існує така послідовність натуральних чисел* (a_k), *що*

$$G(a_n) \equiv p_{a_1}\prod_{k=1}^{\infty} p_{a_ka_{k+1}} > 0$$

і його точковим спектром є множина $D_\zeta = \{x : G(a_n) > 0\}$.

Доведення. Оскільки кожне число півінтервала $(0,1]$ має єдине 2^∞-зображення, то для $x = \Delta^{2^\infty}_{a_1,a_2,\ldots,a_k,\ldots}$ має місце рівність:

$$P\{\zeta = x\} = p_{a_1}\prod_{k=1}^{\infty} p_{a_ka_{k+1}}, \tag{15}$$

а отже, x є атомом тоді і тільки тоді, коли $G(a_n) > 0$. □

Наслідок 7. *Розподіл випадкової величини* ζ *є неперервним тоді і тільки тоді, коли для довільної послідовності натуральних чисел* (a_k)

$$p_{a_1}\prod_{k=1}^{\infty} p_{a_ka_{k+1}} = 0.$$

Наслідок 8. *Якщо існує набір натуральних чисел* $i_1, i_2, \ldots, i_k$ *такий, що*

$$p_{i_1i_2} = p_{i_2i_3} = \ldots = p_{i_ki_1} = 1,$$

то точка $x = \Delta^{2^\infty}_{(i_1i_2\ldots i_k)}$ *є атомом розподілу* ζ *з масою* p_{i_1}.

Наслідок 9. *Якщо елементи матриці перехідних ймовірностей* $\|p_{ik}\|$ *відокремлені від одиниці, то розподіл випадкової величини* ζ *є неперервним.*

Наслідок 10. *Якщо*

$$W = \prod_{k=1}^{\infty} \max_i\{p_{ik}\} = 0,$$

то розподіл випадкової величини ζ *є чисто неперервним, тобто ймовірнісна міра кожної одноточкової множини дорівнює 0.*

Справді, оскільки $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_{ik} = 1$, то кожен рядок матриці $\|p_{ik}\|$ має найбільший елемент, а отже, для будь-якого $x \in (0,1]$

$$P\{\zeta = x\} = p_{a_1(x)}\prod_{k=1}^{\infty} p_{a_k(x)a_{k+1}(x)} \leq W = 0.$$

Лема 9. *Взагалі кажучи, розподіл випадкової величини ζ є сумішшю дискретного та неперервного розподілів.*

Доведення. Наведемо приклад, коли розподіл ζ буде сумішшю.

Нехай матриця перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ має наступну властивість: $p_{11} = 1$, $p_{ik} = \frac{1}{2^{k-1}}$ для всіх $i > 1$. При цих умовах ясно, що $p_{i1} = 0$ при $i > 1$ розподіл матиме єдиний атом — точку $x = \Delta^{2^\infty}_{(1)}$ з масою p_1. Разом з цим нуль-множина канторівського типу $C[2^\infty, V]$, де $V = N \setminus \{1\}$, повністю належить неперервному спектру. Більше того,

$$P\{\zeta \in C[2^\infty, V]\} = 1 - P\{\zeta \in \Delta^{2^\infty}_1\} - P\{\zeta \in \bigcup_{i_1=2}^{\infty} \Delta^{2^\infty}_{i_1 1}\} -$$

$$-P\{\zeta \in \bigcup_{i_1=2}^{\infty} \dots \bigcup_{i_k=2}^{\infty} \Delta^{2^\infty}_{i_1 \dots i_k 1}\} - \dots = 1 - p_1 - 0 - 0 - \dots = 1 - p_1 > 0.$$

□

Зауваження 9. *Розподіл випадкової величини ζ може мати атоми, навіть коли в матриці перехідних ймовірностей нулів взагалі немає. Наприклад, якщо $p_{ik} > 0$ для всіх $i \in N$, $k \in N$, але*

$$p_{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{(i+1)^2},$$

то в цьому випадку точковий спектр розподілу ζ буде співпадати з хвостовою множиною 2^∞-зображення, представником якої є точка $x_0 = \Delta^{2^\infty}_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}$, де $a_n = n$, $n = 1, 2, \dots$. Справді,

$$P\{\zeta = x_0\} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(i+1)^2}\right) = \prod_{i=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) > 0,$$

оскільки ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збігається.

Лема 10. *Спектром розподілу випадкової величини ζ є замикання множини*

$$E = \{x : x = \Delta^{2^\infty}_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}, \quad p_i > 0 \ \ \forall i \in N, \quad p_{a_k a_{k+1}} > 0 \ \ \forall k \in N\}.$$

Доведення. 1. Покажемо, що $E \subset S_\zeta$. Нехай $\Delta^{2^\infty}_{a_1 a_2 \dots a_k \dots} = x \in E$. Тоді

$$\mathsf{P}\{\zeta \in \Delta^{2^\infty}_{a_1 a_2 \dots a_k}\} = p_{a_1} \prod_{i=1}^{k-1} p_{a_i a_{i+1}} > 0$$

для довільного $k \in N$. З властивостей циліндрів випливає, що для довільного додатного ε існує таке k, що

$$\Delta^{2^\infty}_{a_1 a_2 \dots a_k} \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon).$$

Тому

$$\mathsf{P}\{\zeta \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)\} \geq \mathsf{P}\{\zeta \in \Delta^{2^\infty}_{a_1 a_2 \dots a_k}\} > 0,$$

тобто $x \in S_\zeta$ і, отже, $E \subset S_\zeta$.

2. Покажемо, що $S_\zeta \subset \overline{E}$. Нехай $x \in S_\zeta$, тобто

$$\mathsf{P}\{\zeta \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\} > 0 \ \ \textit{для будь-якого} \ \ \varepsilon > 0. \tag{16}$$

Припустимо, що існує k таке, що $p_{a_{k-1}a_k} = 0$, де $\Delta^{2^\infty}_{a_1a_2\ldots a_k\ldots} = x$. Тоді

$$\mathsf{P}\{\zeta \in \Delta^{2^\infty}_{a_1a_2\ldots a_k}\} = p_{a_1}\prod_{i=1}^{k-1} p_{a_ia_{i+1}} = 0.$$

Можливі два випадки:
(1) існує $\varepsilon > 0$ таке, що $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \Delta^{2^\infty}_{a_1a_2\ldots a_k}$;
(2) $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \not\subset \Delta^{2^\infty}_{a_1a_2\ldots a_k}$ для довільного $\varepsilon > 0$.

У першому випадку

$$\mathsf{P}\{\zeta \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\} \le \mathsf{P}\{\zeta \in \Delta^{2^\infty}_{a_1a_2\ldots a_k}\} = 0,$$

що суперечить (16).

У другому випадку x є односторонньою граничною точкою множини S_ζ. Для конкретності, нехай лівосторонньою. Тоді існує таке $\varepsilon > 0$, що $(x-\varepsilon, x) \subset \Delta^{2^\infty}_{a_1a_2\ldots a_k}$ і $\mathsf{P}\{\zeta \in (x, x+\varepsilon)\} = 0$. І в цьому випадку

$$\mathsf{P}\{\zeta \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\} = \mathsf{P}\{\zeta \in (x-\varepsilon, x)\} \le \mathsf{P}\{\zeta \in \Delta^{2^\infty}_{a_1a_2\ldots a_k}\} = 0,$$

що суперечить умові (16).

Отримана суперечність доводить, що $p_{a_{k-1}a_k} > 0$ для довільного $k \in N$, тобто $x \in E$. Отже, $S_\zeta = E$, що й вимагалося довести. $\square$

Теорема 15. *Якщо матриця перехідних ймовірностей* $\|p_{ik}\|$ *має принаймні один нуль, то спектр розподілу випадкової величини* ζ *має нульову міру Лебега.*

Доведення. Якщо $p_{ij} = 0$, то згідно з лемою 10 $S_\zeta \subset D[2^\infty, \overline{ij}]$. А тому, згідно з теоремою 6, $\lambda(S_\zeta) = \lambda(D[2^\infty, \overline{ij}]) = 0$. $\square$

Наслідок 11. *Якщо елементи матриці перехідних ймовірностей* $\|p_{ik}\|$ *відокремлені від одиниці і вона містить принаймні один нуль, то розподіл випадкової величини* ζ *є сингулярним розподілом канторівського типу.*

Наслідок 12. *Якщо матриця перехідних ймовірностей* $\|p_{ik}\|$ *містить нуль і для будь-якої послідовності* $(a_n), a_n \in N$, *вираз* (15) *рівний нулю, то розподіл* ζ *є сингулярним розподілом канторівського типу.*

Література

[1] *Albeverio S., Baranovskyi O., Pratsiovytyi M., Torbin G.* The Ostrogradsky series and related Cantor-like sets // Acta Arith. – 2007. – Vol. 130, no. 3. – P. 215-230.

[2] *Albeverio S., Baranovskyi O., Pratsiovytyi M., Torbin G.* The set of incomplete sums of the first Ostrogradsky series and anomalously fractal probability distributions on it // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. – 2009. – Vol. 54, no. 2. – P. 85-115.

[3] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension // Ergod.Th. and Dynam. Sys. – 2004. – Vol. 24. – P. 1-16.

[4] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension // Central European Journal of Mathematics. – 2008. – 6, № 1. – P. 119-128.

[5] *Kakutani S.* Equivalence of infinite product measures // Ann. of Math. – 1948. – Vol. 49. – P. 214-224.

[6] Minkowski H. *Geometrie der Zahlen.* – Teubner, Leipzig, 1896 (Reprinted: Teubner, Leipzig, 1910, 1925; Chelsea, 1953; Johnson Reprint Corporation, New York, 1968).

[7] *Pierce T. A.* On an algorithm and its use in approximating roots of algebraic equations // Amer. Math. Monthly. – 1929. – Vol. 36, no. 10. – P. 523-525.

[8] *Pratsiovytyi M.* Geometry of numbers in the representation systems with infinite alphabet is a basis of topological, metric, fractal, and probabilistic theories // International Conference on Algebra dedicated to 100th anniversary of S.M. Chernikov. Kyiv, Ukraine, August 20-26, 2012 / Book of abstracts. – P. 118.

[9] *Pratsiovytyi M., Khvorostina Yu.* Topological and metric properties of distributions of random variables represented by the alternating Lüroth series with independant elements // Random Oper. Stoch. Equ. – 2013. – Vol.21, no4. – Pp. 385-401.

[10] *Pratsiovytyi M., Kyurchev D.* Properties of the random variable defined by A_2-continued fraction with independent elements // Random operators and stochastic equations. – 2009. – Volume 17. – Number 1. – P. 91-101.

[11] *Sierpiński W.* O kilku algorytmach dla rozwijania liczb rzeczywistych na szeregi // Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III. – 1911. – t. 4. – Str. 56-77.

[12] *Zhykharyeva Y., Pratsiovytyi M.* Expansions of numbers in positive Luroth series and their applications to metric, probabilistic and fractal theories of numbers // Algebra and Discrete Mathematics. – 2012. – Volume 14. – Number 1. – P. 145-160.

[13] *Барановський О. М., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Тополого-метричні властивості множин дійсних чисел з умовами на їх розклади в ряди Остроградського // Укр. мат. журн. — 2007. — Т. 59, № 9. — С. 1155-1168.

[14] Биллингслей П. *Эргодическая теория и информация.* — М.: Мир, 1969. — 238 с.

[15] Боровков А. А. *Теория вероятностей.* — М.: Наука, 1986. — 432 с.

[16] *Гетьман Б. І., Працьовитий М. В., Барановський О. М.* Про властивості однієї сім'ї множин канторівського типу, що визначається умовами на елементи розкладу в ряд Енгеля // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2010. — № 11. — С. 97-118.

[17] *Дмитренко С. О., Кюрчев Д. В., Працьовитий М. В.* Ланцюгове A_2-зображення дійсних чисел // Український математичний журнал. — 2009. — том 61. — № 4. – С. 452-463.

[18] *Жихарева Ю. І., Працьовитий М. В.* Зображення чисел знакододатними рядами Люрота: основи тополого-метричної, фрактальної і ймовірнісної теорій // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2008. — № 9. — С. 200-211.

[19] *Кавун Н. И.* Обоснование теории вещественных чисел по способу А.Н. Колмогорова // Успехи математических наук,1947. — т. II, вип. 5. — С. 119-229.

[20] *Колмогоров А. М.* К обоснованию теории вещественных чисел // Успехи математических наук. — 1946. — Т.1. — Випуск 1(11). — С. 217-219.

[21] Колмогоров А. М., Фомін С. В. *Елементи теорії функцій і функціонального аналізу.* — К.: Вища шк., 1974. — 456 с.

[22] Постников А. Г. *Вероятностная теория чисел.* — М. : Знание, 1974. — 64 с.

[23] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.

[24] *Працьовита І. М.* Ряди Остроградського 2-го виду і розподіли їх випадкових неповних сум // Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. – 2006. – № 7. – С. 174-189.

[25] *Працьовита І. М.* Про розклади чисел у знакозмінні s-адичні ряди і ряди Остроградського 1-та 2-го видів // Укр. мат. журн. – 2009. – Т. 61, № 7. – С. 958-968.

[26] *Працьовитий М. В., Гетьман Б. І.* Ряди Енгеля та їх застосування // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2006. – № 7. – С. 105-116.

[27] *Працьовитий М. В., Задніпряний М. В.* Геометрія і основи метричної теорії зображення дійсних чисел рядами Сільвестера // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2011. – № 12. – С. 169-182.

[28] *Працьовита І. М., Задніпряний М. В.* Розклади чисел в ряди Сільвестера та їх застосування // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2009. – № 10. – С. 73-87.

[29] Стахов А. П. *Введение в алгоритмическую теорию измерения.* — М.: Сов. радио, 1977. – 288 с.

[30] Турбин А. Ф., Працевитый Н. В. *Фрактальные множества, функции, распределения.* — К.: Наукова думка, 1992. – 208 с.

[31] Хинчин А. Я. *Цепные дроби.* — М.: Наука, 1978. – 116 с.