МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. А.М.ГОРЬКОГО

На правах рукописи

И.И.СТАРУН

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

№ 01.003 /дифференциальные и интегральные уравнения/

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-метематических наук

Киев - 1969

Работа выполнена в Киевском государственном педагогическом институте им. А.М.Горького.

Научный руководитель -
доктор физико-математических наук Н.И.ШКИЛЬ

Официальные оппоненты:

Доктор физико-математических наук,
профессор Ю.А.РЯБОВ

Доктор физико-математических наук И.А.ПАВЛЮК

Оппонирующее предприятие - Одесский государственный университет им. И.И.Мечникова.

Автореферат разослан "___"________________ 19__ г.

Защита диссертации состоится "___"____________ 19__ г.

на заседании Ученого Совета физико-математического факультета Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького.

Отзывы просим присылать по адресу:

г. Киев - 30, ул. Бульвар Шевченко 22/24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Вопрос об асимптотическом поведении решений обыкновенных дифференциальных уравнений и тесно примыкающая к этому вопросу задача об устойчивости движения, начиная с конца XIX века служит предметом многочисленных исследований. Так многие задачи устойчивости движения, астрофизики, строительной механики, автоматического регулирования, приводящие к линейным дифференциальным уравнениям, требуют исследования поведения решений этих уравнений при неограниченном возрастании независимого переменного, в качестве которого чаще всего является время.

Таким исследованиям посвящены работы многих авторов как за рубежом, так и в нашей стране. В частности это работы А.М.Ляпунова, Н.Н.Боголюбова, О.Перрона, Г.Шпета, Ю.А.Митропольского, С.Ф.Фещенко, Н.П.Еругина, И.З.Штокало, Н.Левинсона, Р.Беллмана, И.М.Рапопорта, Н.И.Гаврилова, В.В.Немыцкого, В.В.Степанова, Б.П.Демидовича, Ю.Л.Далецкого, С.Г.Крейна, А.М.Самойленко, В.П.Басова, Н.Я.Лященко, Н.И.Шкиля, М.В.Федорюка, И.А.Павлюка, В.Вазова, В.В.Костина, А.В.Костина, П.И.Коваля и др.

Исследования, проведенные в реферируемой работе, тесно примыкают к исследованиям И.М.Рапопорта [1], Н.Левинсона [2], П.И.Коваля [3], Н.И.Шкиля [4, 5]. В работах этих авторов исследовались системы так называемого L - диагонального вида, т.е. системы

$$\frac{dy}{dt} = \left[W(t) + C(t) \right] y, \qquad /I/$$

где $W(t)$ - или диагональная матрица /тогда система /I/ называется L-диагональной/ или состоит из жордановых клеток /тогда система называется обобщенной L - диагональной/, а $C(t)$ - квадратная матрица, элементы которой удовлетворяют некоторым условиям суммируемости

/абсолютной интегрируемости/[1,2] . Исследования, выполненные И.М.Рапопортом [1] , проведены при помощи метода, идея которого заключается в преобразовании системы линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x\,, \quad t \geqslant t_0 \geqslant 0\,, \qquad /2/$$

где $A(t)$ - действительная квадратная матрица порядка n , x - n -мерный вектор, к L - диагональному виду /I/ при помощи линейных подстановок. Однако такие подстановки построены И.М.Рапопортом [1] , а позже Т.Г.Васьковской [6] и П.И.Ковалем [3] , в случае, когда характеристическое уравнение

$$\det \| A(t) - \lambda E \| = 0 \qquad /3/$$

/ E - единичная матрица/

имеет лишь простые корни во всем промежутке изменения независимого переменного t . Случай же, когда уравнение /3/ имеет кратные корни, которым отвечают кратные элементарные делители, исключался этими авторами из рассмотрения. Это объясняется тем, что метод построения подстановок, приводящих системы /2/ к виду /I/, тесно связаны с методами асимптотического интегрирования линейных систем с большим, или малым параметром. В работах Г.Биркгоффа [7] , Я.Д.Тамаркина [8] , В.С.Пугачева [9] разработан метод асимптотического интегрирования линейных дифференциальных систем, содержащих большой параметр, в случае, когда характеристическое уравнение, соответствующее этой системе, имеет простые корни. Используя этот метод, И.М.Рапопорту, а позже Т.Г.Васьковской, удалось построить, как отмечалось выше, линейные подстановки, приводящие системы вида /2/ к L - диагональному виду /1/ .

Впервые вопрос о приведении систем вида /2/ к обобщенному L - диагональному виду /I/ решался Н.И.Шкилем [4,5]. Это стало возможным лишь после того, как им был разработан метод асимптотического интегрирования систем линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами в случае, когда соответствующее характеристическое уравнение имеет кратные корни, которым соответствуют кратные элементарные делители. При этом предполагалось, что уравнение /3/ имеет один корень кратности n которому соответствует один элементарный делитель тождественной кратности. После работ Н.И.Шкиля и наших работ [10-14], в которых указан метод построения асимптотических решений систем линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами в случае, когда кратному корню характеристического уравнения соответствуют несколько кратных элементарных делителей, возникла возможность построения линейных подстановок, приводящих системы вида /2/ к виду /I/ в случае произвольных корней уравнений /3/. При этом на корни накладывается условие, чтобы кратности их как и кратности соответствующих им элементарных делителей не менялись на полуоси $[t_0, \infty)$.

Вопросу построения линейных подстановок, приводящих системы вида /2/ к виду /I/ в случае произвольных корней уравнения /3/ и посвящается, в основном, реферируемая диссертационная работа.

Диссертация состоит из введения и двух глав, в конце диссертации приводится список литературы /II2 названий/.

Во введении дается обзор работ, посвященных исследованию асимптотического поведения решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и линейных разностных уравнений, а также приводится краткий перечень работ, посвященных асимптотическому интегрированию обыкновенных линейных дифференциальных уравнений содержащих большой или малый параметр.

Глава I посвящается исследованию системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau, \varepsilon)\, x \,, \qquad /4/$$

где $A(\tau,\varepsilon)$ - квадратная матрица порядка n, x - n - мерный вектор, $0 \le \tau = \varepsilon t \le L < \infty$, ε - малый параметр, в том случае, когда характеристическое уравнение

$$det \, \| A^{(0)}(\tau) - \lambda E \| = 0 \qquad /5/$$

имеет один корень кратности n, которому соответствуют несколько кратных и несколько простых элементарных делителей. При этом предполагается, что матрица $A(\tau,\varepsilon)$ допускает разложение

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{s} A^{(s)}(\tau) \,. \qquad /6/$$

§§ I-2 этой главы носят вспомагательный характер. В частности, в § I приводятся основные положения из теории преобразующих матриц, дается доказательство дифференцируемости преобразующей матрицы в случае кратных корней характеристического уравнения, обладающих как кратными так и простыми элементарными делителями /лемма I.I/.

В § 3 строятся асимптотические решения системы /4/ в случае, когда кратному корню уравнения /5/ соответствуют несколько кратных и несколько простых элементарных делителей. В этом параграфе доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА I. Пусть характеристическое уравнение /5/ имеет один корень $\lambda = \lambda^{(0)}(\tau)$ кратности n, которому соответствуют p кратных элементарных делителей, кратности которых равны $\tau_1, \ldots, \tau_p$, и q простых элементарных делителей. Пусть кроме того, числа $\tau_1, \ldots, \tau_p$, удовлетворяют соотношению

$$\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_p. \qquad /7/$$

Тогда, если выполняются условия:

1/ $A(\tau,\varepsilon)$ неограниченно дифференцируема по τ на сегменте $[0,L]$;

2/ уравнение

$$\det \Delta(\omega,\tau) = 0 , \qquad /8/$$

где

$$\Delta(\omega,\tau) = \begin{Vmatrix} [C_{\tau_1,1}(\tau)+\omega], & C_{\tau_1,\tau_1+1}(\tau), & \ldots, & C_{\tau_1,(p-1)\tau_1+1}(\tau) \\ C_{2\tau_1,1}(\tau), & [C_{2\tau_1,\tau_1+1}(\tau)+\omega], & \ldots, & C_{2\tau_1,(p-1)\tau_1+1}(\tau) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{p\tau_1,1}(\tau), & C_{p\tau_1,\tau_1+1}(\tau), & \ldots, & [C_{p\tau_1,(p-1)\tau_1+1}(\tau)+\omega] \end{Vmatrix}, \qquad /9/$$

а $C_{i\tau_1,(k-1)\tau_1+1}(\tau)$ $/i,k = 1,\ldots,p/$ – элементы матрицы

$$C(\tau) = B^{-1}(\tau)\left[\frac{dB(\tau)}{d\tau} - A^{(1)}(\tau)\,B(\tau)\right] \qquad /10/$$

/ $B^{-1}(\tau)$ - матрица, обратная к матрице преобразования $B(\tau)$, $B^{-1}(\tau)A^{(0)}(\tau)B(\tau) = W(\tau)$, где матрица $W(\tau)$ имеет каноническую форму Жордана/, имеет хотя бы один простой, отличный от нуля корень

$$\omega = \omega^{(0)}(\tau) \neq 0\ , \quad \tau \in [0, L]\ , \qquad /11/$$

то система /4/ имеет формальное частное решение вида

$$x(t,\varepsilon) = U(\tau,\mu)\exp\Big(\int_0^t \lambda(\tau,\mu)\,dt\Big)\ , \qquad /12/$$

где $U(\tau,\mu)$ - n - мерный вектор, $\lambda(\tau,\mu)$ - скалярная функция, допускающие разложения

$$U(\tau,\mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s U^{(s)}(\tau)\ , \quad \lambda(\tau,\mu) = \lambda^{(0)}(\tau) +$$

$$+ \mu \sqrt[\tau_1]{\omega^{(0)}(\tau)} + \sum_{s=2}^{\infty} \mu^s \lambda^{(s)}(\tau)\ , \quad \mu = \sqrt[\tau_1]{\varepsilon}\ . \qquad /13/$$

Здесь же показано /теорема 1.2/, что если числа $\tau_1, \ldots, \tau_p$ летворяют соотношению

$$\tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_{K_1} > \tau_{K_1+1} = \cdots = \tau_{K_1+K_2} > \cdots > \tau_{K_1+\cdots+K_{N-1}+1} = \cdots = \tau_p, \qquad /14/$$

то система /4/ имеет формальные частные решения вида

$$x_j(t,\varepsilon) = U_j(\tau,\mu_j)\exp\Big(\int_0^t \lambda_j(\tau,\mu_j)\,dt\Big)\ , \qquad /15/$$
$$j = 1, \ldots, N,$$

где $U_j(\tau,\mu_j)$ - векторы размерности n , $\lambda_j(\tau,\mu_j)$ - скалярные функции, допускающие разложения

$$U_j(\tau,\mu_j) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu_j^s U_j^{(s)}(\tau)\ , \quad \lambda_j(\tau,\mu_j) = \lambda^{(0)}(\tau) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty} \mu_j^s \lambda_j^{(s)}(\tau)\ , \quad \mu_j = \sqrt[\tau_{\ell_j}]{\varepsilon}\ , \quad \ell_j = K_1 + \cdots + K_j\ , \qquad /16/$$
$$j = 1, \ldots, N.$$

На асимптотический характер построенных решений указывает теорема I.3, метод доказательства которой принадлежит Н.И.Шкилю и приведен нами в § 4.

§ 5 посвящен построению частных формальных решений системы /4/ при достаточных условиях, отличных от условий 2/ теоремы I. Именно, здесь показано, что если система /4/ удовлетворяет требованиям теоремы I, где матрица $\Delta(\omega,\tau)$ из /9/ заменена матрицей

$$\tilde{\Delta}(\omega,\tau) = \begin{Vmatrix} [C_{1,\tau_1(\tau)}+\omega], & \ldots, & C_{1,p\tau_1(\tau)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{(p-1)\tau_1+1,\tau_1(\tau)}, & \ldots, & [C_{(p-1)\tau_1+1,p\tau_1(\tau)}+\omega] \end{Vmatrix}, \qquad /I7/$$

то система /4/ имеет формальные частные решения вида /I2/, /I3/.

Нетрудно видеть, что теорема I /аналогично остальные теоремы §§ 3, 5/ при условии, что уравнение /8/ имеет p простых, отличных от нуля корней, позволяет строить лишь $n-q$ частных решений. Для отыскания остальных q решений в § 6 предложен следующий способ. Сначала строится частное решение системы /4/, содержащее $n-q$ "существенных" произвольных постоянных, которое используется для асимптотического понижения порядка исходной системы /4/ на $n-q$ единиц. Полученная таким образом система специальным экспоненциальным преобразованием приводится к системе, которая, в отличие от системы /4/, позволяет применение метода последовательных приближений, при помощи которого и отыскиваются недостающие q решений.

В заключительном § 7 приведен пример применения изложенного асимптотического метода к решению одной задачи астрофизики. Именно, отыскивается решение системы двух линейных уравнений второго порядка, описывающих взаимодействие обыкновенной и необыкновенной радиоволн в плазме и ионосфере. Найденные нами основные характеристики, а также первое приближение решения совпадает с результатами, полученными другими авторами /см., например, В.В.Железняков, Радиоизлучение Солнца и планет, Изд-во "Наука", 1964/, при помощи так называемого метода геометрической оптики.

Вторая глава посвящена, в основном, построению линейных подстановок, приводящих системы линейных дифференциальных уравнений вида /2/ к обобщенному L -диагональному виду /I/, где матрица $W(t)$ имеет, в общем случае, вид

$$W(t) = \begin{Vmatrix} W_0(t) & & & 0 \\ & W_1(t) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & W_p(t) \end{Vmatrix}, \qquad /18/$$

$$W_0(t) = diag\{\lambda_1(t), \dots, \lambda_{r_0}(t)\}, \qquad /19/$$

$$W_i(t) = \begin{Vmatrix} \lambda_{r_0+i}(t) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{r_0+i}(t) & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{r_0+i}(t) \end{Vmatrix}, \quad i=1,\dots,p \qquad /20/$$

/среди функций $\lambda_1(t), \dots, \lambda_{r_0}(t), \lambda_{r_0+1}(t), \dots, \lambda_{r_0+p}(t)$ могут быть и равные/

§ I-2, как и в первой главе, носят вспомагательный характер. В частности, в § I приводится доказательство леммы, устанавливающей непрерывную дифференцируемость и суммируемость преобразующей матрицы в бесконечном интервале изменения независимого переменного t /лемма 2.I/.

В § 3 приводится доказательство теоремы, указывающей на асимптотический характер решений обобщенной L - диагональной системы /I/ из матрицей $W(t)$ вида /18-20/. Здесь доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть коэффициенты обобщенной L -диагональной системы /I/ удовлетворяют условиям:

а/ элементы матрицы $C(t)$ таковы, что

$$\int_{t_0}^{\infty} |c_{ij}(t)|\, t^{2q}\, dt < \infty, \quad i,j=1,\dots,n; \qquad /21/$$

б/ обозначим через $d_{kj}(t) = Re\,\lambda_k(t) - Re\,\lambda_j(t)$.

Допустим, что все j $/1 \le j \le r_0+p/$, попадают в один из двух классов I_1, I_2, где

$$j \in I_1, \text{ если } t^{-q} \exp\Big(\int_{t_0}^{t} d_{kj}(s)\,ds\Big) \to \infty \quad \text{при} \quad /22/$$

$t \to \infty$ и

$$(|t-\tau|^q + 1)\exp\Big(-\int_{\tau}^{t} d_{kj}(s)\,ds\Big) \le M < \infty \quad \text{при} \quad /23/$$

$t \ge \tau \ge 0$;

$$j \in I_2, \text{ если } \int_{\tau}^{t} d_{kj}(s)\,ds \le N < \infty. \qquad /24/$$

при $t \ge \tau \ge 0$,

где $q+1 = max\{r_1, \dots, r_p\}$.

Тогда существует такое достаточное большое T, что при $t \ge T$ система /I/ имеет решения, асимптотически равные решениям системы

$$\frac{dz}{dt} = W(t)\,z, \qquad /25/$$

т.е. если $y_i(t)$ -решение системы /I/, а $z_i(t)$ - соответствующее решение системы /25/, то при $t \geq T$

$$y_i(t) = z_i(t) + o(1). \qquad /26/$$

§ 4 посвящен построению подстановок, приводящих системы вида /2/ к обобщенному L -диагональному виду/I/. При этом, подобно [4,5], применен следующий прием. Наряду с системой /2/ рассматривается система

$$\varepsilon \frac{dx}{d\tau} = A(\tau)x, \qquad /27/$$

где ε - параметр /при $\varepsilon = 1$ система /27/ тождественна системе /2/. Положив теперь $\tau = \varepsilon t$, придем к системе с "медленно" меняющимися коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau)x. \qquad /28/$$

В системе /28/ сделаем подстановку

$$x = \mathcal{U}_m(\tau,\mu)y, \qquad /29/$$

где $\mathcal{U}_m(\tau,\mu)$ -квадратная матрица порядка n вида

$$\mathcal{U}_m(\tau,\mu) = \sum_{s=0}^{m+\nu-1} \mu^s \mathcal{U}^{(s)}(\tau), \quad \mu = \sqrt[\nu]{\varepsilon}, \qquad /30/$$

а ν - число, равное кратности наибольшего кратного элементарного делителя/, т.е., равно порядку клетки Жордана в /I8/, имеющей наибольшую размерность/, придем к системе

$$\mathcal{U}_m(\tau,\mu)\frac{dy}{dt} = \left[A(\tau)\mathcal{U}_m(\tau,\mu) - \varepsilon\frac{d\mathcal{U}_m(\tau,\mu)}{d\tau}\right]y. \qquad /31/$$

Матрицу $\mathcal{U}_m(\tau,\mu)$ будем строить исходя из равенства

$$A(\tau)\mathcal{U}_m(\tau,\mu) - \varepsilon\frac{d\mathcal{U}_m(\tau,\mu)}{d\tau} = \mathcal{U}_m(\tau,\mu)\left[\Lambda_m(\tau,\mu) + \mu^{m+\nu}C_m(\tau,\mu)\right], \qquad /32/$$

в котором

$$\Lambda_m(\tau,\mu) = \overset{0}{W}(\tau) + \sum_{s=1}^{m} \mu^s \overset{(s)}{\Lambda}(\tau) , \qquad /33/$$

причем $\overset{0}{W}(\tau)$ - матрица /I8/, $\overset{(s)}{\Lambda}(\tau)$ - по предположению диагональные матрицы. $C_m(\tau,\mu)$ - матрица, подлежащая как и $\overset{(s)}{\Lambda}(\tau)$, $s=1,\dots,m$, определению.

В зависимости от того, какие корни имеет уравнение /3/, различаются два случая:

I/случай одного корня, которому соответствуют:

а/ несколько кратных элементарных делителей;

б/ несколько кратных и несколько простых элементарных делителей;

в/ несколько простых элементарных делителей;

2/ случай нескольких корней.

В каждом из указанных случаев дается способ решения матричных уравнений, получаемых при сравнении в равенстве /32/ коэффициентов при одинаковых степенях параметра μ. Предполагая, что построенная матрица $U_m(\tau,\mu)$ при $\varepsilon=1$ и $t\in[t_0,\infty)$ является неособенной, систему /3I/, согласно /32/, можно записать в виде

$$\frac{dy}{dt} = \left[\Lambda_m(t,1) + C_m(t,1)\right] y . \qquad /34/$$

Если теперь система /34/ удовлетворяет условиям теоремы 2, то при помощи этой теоремы можно исследовать асимптотическое поведение решений системы /34/, а значит, и системы /2/.

При построении подстановок в § 4 предполагается, что уравнение типа /8/ имеет хотя бы один простой, отличный от нуля корень

$$\omega = \omega^{(0)}(t) \neq 0, \quad t \in [t_0, \infty) . \qquad /35/$$

§ 5 посвящен рассмотрению особого случая, а именно, случая, когда уравнение /3/ имеет несколько кратных корней, которым соответствуют лишь простые элементарные делители и система /2/ не разделяется по методу Н.Я.Лященко [15] . Показано, что при помощи некоторых линейных преобразований этот случай сводится к ранее рассмотренным случаям.

В § 6 рассматривается вопрос построения линейных подстановок, приводящих системы вида

$$\frac{dx}{dt} = [A_0(t) + A(t)]x, \quad t \geq t_0 \geq 0 \qquad /36/$$

к L - диагональному виду /34/ с диагональной матрицей $\Lambda_m(t,1)$ в случае, когда характеристическое уравнение матрицы $A_0(t)$ имеет кратные корни, которым соответствуют лишь кратные элементарные делители. Оказывается, что такие подстановки можно построить, если уравнение типа /8/ имеет столько простых, отличных от нуля корней, сколько элементарных делителей соответствует кратному корню характеристического уравнения. При этом метод построения подстановок аналогичен /29/ - /33/. Единственное отличие здесь состоит в том, что матрица $W(\tau)$ в $\Lambda_m(\tau,\mu)$ заменяется диагональной матрицей, у которой на диагонали стоят собственные значения матрицы $A_0(t)$. На элементы матриц $A_0(t)$ и $A(t)$ накладываются следующие условия: элементы матрицы $A_0(t)$ обладают непрерывными производными на интервале $[t_0, \infty)$ до порядка $m+\nu-1$ включительно, первая из которых абсолютно интегрируема на интервале (τ, ∞) / τ - достаточное большое/; элементы матрицы $A(t)$ на указанном промежутке имеют непрерывные производные до порядка $m+\nu-1$ включительно/ m - любое натуральное число, ν - равно кратности наибольшего элементарного делителя/.

Вопросу устойчивости решений системы /36/ посвящен § 7. Исследования устойчивости решений тесно связаны с исследованиями § 6. В частности здесь имеет место следующая теорема.

<u>ТЕОРЕМА 3.</u> Если при каком-либо достаточном большом T система линейных дифференциальных уравнений /36/ приводится к L-диагональному виду /34//$\Lambda_m(t,1)$- диагональная матрица/линейной подстановкой /29/ /при $\varepsilon = 1$ /, то для устойчивости решений системы /36/ необходимо и достаточно, чтобы

$$| U_m(t,1) \exp (\int_{t_0}^{t} \Lambda_m(t,1) dt) | \leq M < \infty . \qquad /37/$$

/символ $|\ \ |$ обозначает норму матрицы/.

Если же выполняется условие

$$\lim_{t \to \infty} | U_m(t,1) \exp (\int_{t_0}^{t} \Lambda_m(t,1) dt) | = 0 , \qquad /38/$$

то решения системы /36/ асимптотически устойчивы.

В § 8 указывается способ получения линейных подстановок, с помощью которых системы линейных разностных уравнений вида

$$x(s+1) = A(s)\,x(s) \ , \quad s = s_0, s_0+1, \dots \ , \qquad /39/$$

где $x(s)$ - последовательность n -мерных векторов, $A(s)$ - последовательность неособенных квадратных матриц размерности n приводятся к так называемому ℓ - диагональному виду

$$y(s+1) = W(s)[E + C(s)]\,y(s) \ , \qquad /40/$$

/ $W(s)$ -диагональная матрица/ в случае, когда матрица $A(s)$ имеет кратные собственные значения. Такое приведение в случае простых собственных значений матрицы $A(s)$ осуществлено в работах И.М.Рапопорта [1] и П.И.Коваля [3] .

Изложенный в § 8 способ построения подстановок следующий. В системе /39/ делаем замену

$$x(s) = B(s) Q_m(s) y(s) = B(s) \sum_{K=0}^{m+v-1} Q^{(K)}(s)\, y(s) , \qquad /41/$$

v - число, равное кратности наибольшего элементарного ителя/, приходим к системе

$$B(s+1) Q_m(s+1) y(s+1) = A(s) B(s) Q_m(s) y(s) \qquad /42/$$

/матрица $B(s)$ - преобразующая для матрицы $A(s)$ /. Матрицу $Q_m(s)$ ищем исходя из равенства

$$A(s) B(s) Q_m(s) = B(s+1) Q_m(s+1) [\Lambda_m(s) + C_m(s)] , \qquad /43/$$

где $\Lambda_m(s)$ - диагональная матрица, представляющая собой сумму

$$\Lambda_m(s) = \Lambda^{(0)}(s) + \sum_{K=1}^{m} \Lambda^{(K)}(s) , \qquad /44/$$

в которой $\Lambda^{(0)}(s)$ - диагональная матрица, составленная из собственных значений матрицы $A(s)$, а $\Lambda^{(K)}(s)$ - неизвестные диагональные матрицы, подлежащие, как и $C_m(s)$, определению. Равенство /43/ заменяется некоторым другим равенством, содержащим малый параметр μ , которое при $\mu = 1$ тождественно равенству /43/. Параметр μ введен таким образом, чтобы матричные уравнения, получаемые при сравнении коэффициентов при одинаковых степенях этого параметра, были аналогичны матричным уравнениям из § 6 главы II, где указан метод их решения.

Предполагая теперь, что

$$\det Q_m(s) \neq 0 , \qquad /45/$$

уравнение /42/, согласно /43/, можно записать в виде

$$y(s+1) = [\Lambda_m(s) + C_m(s)]\, y(s). \qquad /46/$$

Если теперь система /46/ такова, что ее коэффициенты удовлетворяют условиям: $\lambda_i(s) \neq 0$ и

$$\text{или } \left| \frac{\lambda_i(s)}{\lambda_j(s)} \right| \leq 1 , \text{ или } \left| \frac{\lambda_i(s)}{\lambda_j(s)} \right| \geq 1 , \qquad /47/$$

$$\sum_{s=s_0}^{\infty} | C_{ij}^{(1)}(s) | < \infty , \quad i,j = 1, \ldots, n \qquad /48/$$

/ $\lambda_i(s)$, $\lambda_j(s)$ - диагональные элементы матрицы $\Lambda_m(s)$, $\dot{c}_{ij}^{(1)}(s)$ - соответствующие элементы матрицы $\Lambda_m^{-1}(s)\, C_m(s)$ /, то, как показано в [1], система /46/ имеет n частных линейно независимых решений, для которых имеют место асимптотические формулы

$$y_i(s) = [e_i + r_i(s)] \cdot \prod_{t=s_0}^{s-1} \lambda_i(t), \quad i = 1, \dots, n \qquad /49/$$

при достаточно больших значениях $s \geqslant s_0$, где e_i -векторы размерности n вида

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - i, \qquad /50/$$

а при $s \to \infty$ $r_i(s) \to 0$.

А знание асимптотического поведения решений системы /46/ дает возможность исследовать поведение решений и исходной системы /39/.

Результаты диссертации докладывались на республиканском симпозиуме по дифференциальным уравнениям /Одесса, 1968/, на IУ республиканской конференции молодых математиков Украины /Киев, 1968/, на семинарах академиков АН УССР Ю.А.Митропольского и И.З.Штокало, член-корреспондента Ю.Д.Соколова, а также опубликованы в работах [11-14], [16-18].

ЛИТЕРАТУРА

1. И.М.РАПОПОРТ – О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений, Изд-во, АН УССР, К., 1954.

2. Э.А.КОДДИНГТОН, Н.ЛЕВИНСОН – Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, Изд-во ИЛ, М., 1958.

3. П.И.КОВАЛЬ – Об асимптотическом поведении решений линейных разностных и дифференциальных уравнений, ДАН СССР, 114,5, 1957.

4. Н.И.ШКИЛЬ – Приведение систем линейных дифференциальных уравнений к обобщенному L – диагональному виду, Дифференциальные уравнения, 2, 11, 1966.

5. Н.И.ШКИЛЬ – О некоторых асимптотических методах в теории линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами, Автореферат докт.дисс., Киев, 1968.

6. Т.Г.ВАСЬКОВСКАЯ – Исследование некоторых новых случаев аисмптотического поведения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, Автореферат канд.дисс., Киев, 1956.

7. G. D. Birkhoff – On the asumptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter, Tr. Amer. Soc., 9, 12, 1908.

8. Я.Д.Тамаркин – О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды, Петроград, 1917.

9. В.С.ПУГАЧЕВ – Об асимптотических представлениях интегралов систем дифференциальных уравнений, содержащих параметр , Матем. сб. I5 37/I, 1944.

I0. М.І.ШКІЛЬ – Побудова загального асимптотичного розв"язку системи лінійних диференціальних рівнянь у випадку кратних елементарних дільників, ДАН УРСР, сер.А, I, 1969.

II. И.И.СТАРУН, Н.И.ШКИЛЬ – Построение асимптотического решения системы линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами в случае кратных элементарных делителей. Дифференциальные уравнения, 5,6,1969.

I2. Н.И.ШКИЛЬ, И.И.СТАРУН – Построение асимптотического решения системы линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами в случае кратных элементарных делителей, Материалы республиканского симпозиума по дифференциальным уравнениям, Одесса, 1968.

13. І.І.СТАРУН, М.І.ШКІЛЬ – Побудова асимптотичного зв"язку системи лінійних диференціальниц рівнянь у випадку кратних елементарних дільників, ІУ наукова конференція молодих математиків України, Київ, 1968.

14. І.І.СТАРУН, М.І.ШКІЛЬ – Побудова асимптотичного розв"язку системи лінійних диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами у випадку кратних елементарних дільників, ДАН УРСР, сер.А, І, 1969.

15. Н.Я.ЛЯЩЕНКО – Об одной теореме разделения линейной системы дифференциальных уравнений, ДАН СССР, 97, 3, 1954.

16. І.І.СТАРУН – Асимптотичне поводження розв"язків узагальнених L – діагональних систем, ДАН УРСР, сер. Б, 7, 1969.

17. І.Г.СТАРУН – Приведення систем лінійних диференціальних рівнянь до узагальненого L -діагонального виду, Вісник КДУ, сер.матем. та мех., № 12, 1970.

18. И.И.СТАРУН – О приведении систем линейных дифференциальных /разностных/ уравнений к L -диагональному / ℓ -диагональному/ виду, Труды семинара по матем. физике, Ин-т матем. АН УССР, вып.3. 1969.